# COLLECTION

DE

# MÉMOIRES

RELATIFS A LA

# PHYSIQUE,

PUBLIÉS PAR

LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.

---

TOME III.

—

MÉMOIRES SUR L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

SECONDE PARTIE.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

—

1887

# XXXI.

## MÉMOIRE COMMUNIQUÉ A L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DANS SA SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1825, FAISANT SUITE AU MÉMOIRE LU DANS LA SÉANCE DU 12 SEPTEMBRE;

Par M.-A. AMPÈRE (¹).

Depuis le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie, dans sa séance du 12 septembre dernier, j'ai été conduit à de nouvelles conséquences de ma formule que je me proposais d'exposer dans un second Mémoire; mais, d'autres occupations ne me permettant pas de le rédiger, j'ai cru devoir, quant à présent, me borner au simple énoncé de ces conséquences.

J'ai trouvé, quel que soit l'exposant $n$ de la puissance de la distance et de cet élément à laquelle leur action mutuelle est réciproquement proportionnelle quand cette distance varie seule :

1° Que, quand les dimensions d'un circuit plan et fermé sont assez petites pour devoir être négligées relativement à la distance où se trouve le circuit du point sur lequel il agit, l'action qu'il exerce est indépendante de sa forme et ne dépend que de sa situation par rapport à ce point et de l'aire qu'il circonscrit, aire à laquelle l'action qu'il produit est toujours proportionnelle.

Il suit de là que tout ce que M. Savary a démontré, le premier, sur la manière d'agir d'un assemblage de courants électriques décrivant de très petites circonférences de cercles de même diamètre, situées dans des plans équidistants et perpendiculaires à la ligne droite ou courbe qui passe par les centres de toutes ces circonférences, y compris la détermination qu'il a donnée de la valeur du nombre $n$, est également vrai à l'égard d'un assemblage de très petits circuits fermés, de même surface et situés dans des plans

(¹) Inédit. Publié d'après le manuscrit autographe des Archives de l'Académie des Sciences. D'après les procès-verbaux, la lecture a été faite en réalité dans la séance du 28 novembre. (J.)

équidistants perpendiculaires à une ligne droite ou courbe entourée par tous ces circuits.

L'action de cet assemblage sur un conducteur voltaïque quelconque est donc, comme celle de l'assemblage considéré par M. Savary, identique à l'action qu'exercerait sur les mêmes corps une particule de barreau aimanté; et il n'est plus nécessaire, dans l'explication de cette dernière action par de très petits courants électriques, de les supposer de forme circulaire.

Ce résultat de ma formule est le seul de ceux qui sont indiqués dans cette Note dont j'ai eu le temps de rédiger la démonstration. On la trouvera à la fin du Mémoire dont j'ai parlé plus haut et que je publie en ce moment (¹).

2° La droite que j'ai nommée normale au plan directeur de l'action dynamique exercée par un circuit fermé à un point quelconque sur un élément d'un conducteur voltaïque se trouve, quand ce circuit est plan et très petit, dans le plan mené par le milieu de l'élément perpendiculairement à celui du circuit; et, lorsqu'on fait $n = 2$, la direction de cette droite est telle qu'elle forme avec la droite menée de l'élément au circuit un angle dont la cotangente est double de la tangente de l'angle compris entre la même droite et le plan du circuit, c'est-à-dire qu'elle est située, relativement à une perpendiculaire élevée sur ce plan, comme l'est, en général, la direction de l'aiguille d'inclinaison relativement à l'axe magnétique de la terre.

3° Quand l'élément sur lequel agit le petit circuit est dans le même plan que ce circuit, la force développée est aussi dans ce plan et proportionnelle à l'aire du circuit divisée par le cube de sa distance à l'élément. Cette force est, comme on sait, toujours perpendiculaire à la direction de ce dernier.

4° Quelles que soient la forme et la grandeur d'un circuit tracé sur un plan dans lequel se trouve aussi l'élément sur lequel il agit, la force qu'il exerce, et qui est encore perpendiculaire à la direction de cet élément, est proportionnelle au volume compris entre l'aire du circuit, la surface du cylindre droit qui a cette aire pour base et la surface courbe dont les ordonnées verticales sont réciproquement proportionnelles aux cubes des distances de leurs

(¹) *Voir* la note de la p. 46 (J.)

pieds au milieu de l'élément, ce qui donne un moyen très simple de calculer cette action. En l'appliquant à celle qu'exerce sur un conducteur rectiligne le circuit fermé composé d'un très petit arc de cercle dont le centre est au milieu de ce conducteur et des rayons menés de ce centre aux deux extrémités du petit arc, on trouve sur-le-champ que cette action est proportionnelle à la différence des distances du milieu de l'arc aux deux extrémités du conducteur rectiligne divisées par le carré du sinus de l'angle que forme celle-ci avec le rayon qui passe par le milieu, résultat que j'ai obtenu d'une manière moins simple dans le Mémoire lu à l'Académie le 12 septembre dernier [1], et qui m'a conduit à un moyen de vérifier ma formule par l'observation du nombre d'oscillations que fait, dans un temps donné, un conducteur formant un demi-cercle par l'action de divers conducteurs en forme de secteurs dont les rayons se coupent sous différents angles.

5° L'action mutuelle de deux circuits plans et fermés, dont les dimensions sont telles qu'ils puissent être considérés comme infiniment petits, et qui sont situés dans un même plan, est dirigée suivant la droite qui les joint; elle ne dépend que des aires qu'ils circonscrivent et de la longueur de cette droite et elle est proportionnelle au produit des deux aires divisé par la puissance $n + 2$ de leur distance.

6° Quelles que soient la forme et la grandeur de deux circuits fermés compris dans un même plan, leur action mutuelle est précisément la même qui aurait lieu entre leurs aires respectives, si toutes les parties de ces aires, supposées partout de même densité, s'attiraient ou se repoussaient, suivant que le courant électrique les parcourt en sens contraire ou dans le même sens, en raison inverse de la puissance $n + 2$ de leurs distances.

7° Si l'on suppose que toutes les dimensions des deux circuits augmentent ou diminuent dans le même rapport, ainsi que les distances mutuelles des points qui se correspondent avant et après ce changement, leur action mutuelle augmentera ou diminuera comme la puissance $2 - n$ de ce rapport, et devra, par conséquent, rester la même si, comme l'indique l'ensemble des faits, le nombre $n$ est égal à 2.

---

(1) *Voir* art. XXX, p. 54. (J.)

8° Si l'on a dans un même plan trois circuits semblables disposés de manière que tous leurs points correspondants soient situés sur les mêmes droites divisées dans le même rapport, que toutes les dimensions de celui qui est entre les deux autres soient des moyennes proportionnelles géométriques entre les dimensions homologues des deux circuits extrêmes, qu'on rende l'intermédiaire mobile dans le plan et qu'on fasse passer un même courant électrique par les trois circuits, de manière qu'il les parcoure alternativement en sens contraires, le circuit mobile sera porté vers le plus grand si $n > 2$, vers le plus petit si $n < 2$, et restera immobile dans cette situation si $n = 2$. Ce résultat, qui est d'ailleurs indépendant, comme il est aisé de le voir, de la manière dont les trois angles qui déterminent la situation respective de deux éléments de conducteurs voltaïques entrent dans l'expression de la force qu'ils exercent l'un sur l'autre, fournit un moyen bien simple de démontrer que l'on a en effet $n = 2$, par des expériences faites directement sur des conducteurs et sans se servir d'aimants, comme on a été jusqu'à présent obligé de le faire dans les expériences dont on a conclu la valeur de $n$. Je décrirai ailleurs (1) un instrument destiné à faire cette expérience avec la plus grande précision.

9° Une fois qu'on aura établi rigoureusement par ce moyen que $n = 2$ dans l'action qu'exercent réellement les conducteurs voltaïques, il faudra remplacer $n$ par 2 dans toutes les conséquences de la formule qui représente cette action. Celle de deux circuits fermés, situés dans un même plan, dont nous venons de parler, sera, par exemple, la même que si toutes les parties des aires qu'ils circonscrivent, supposées de même densité, s'attiraient ou se repoussaient en raison inverse de la quatrième puissance de leurs distances. On sait que cette loi d'attraction ou de répulsion a lieu entre deux très petits aimants, lorsque leurs axes sont perpendiculaires à un même plan passant par les milieux de leurs longueurs, suivant que leurs pôles, de noms différents, sont du même côté de ce plan ou de côtés opposés; il est aisé d'en conclure que deux circuits fermés, situés dans un même plan, agissent l'un sur l'autre comme le feraient une infinité de très petits barreaux per-

(1) *Voir* l'art. XXX, p. 21. (J.)

pendiculaires à ce plan et situés de manière que leurs milieux y fussent situés, qu'ils remplissent toute l'aire de chacun des deux circuits, et qu'ils fussent aimantés au même degré dans le sens où chaque circuit tendrait à rendre magnétique ceux de ces courants qu'il entourerait.

Ce résultat était facile à prévoir en considérant que, d'après l'identité d'action entre des circuits plans infiniment petits entourant des aires égales, quelle que soit la forme de ces courants et d'après la manière dont j'ai considéré les aimants, un circuit plan infiniment petit peut toujours être remplacé par un très petit aimant dont les deux pôles se trouvent sur une normale à un plan et à égale distance de ce plan, l'un d'un côté et l'autre de l'autre, quel que soit d'ailleurs le point de l'aire qu'entoure le circuit où l'on suppose que la normale est élevée, point qu'on peut, pour fixer les idées, prendre au centre de gravité de la petite courbe formée par ce circuit.

---

Soit une surface quelconque terminée par une courbe fermée donnée de grandeur et de position dans l'espace, si l'on suppose qu'à des points infiniment rapprochés dans toute l'étendue de cette surface on place de très petits aimants dont la longueur soit la même pour tous et du même ordre que leurs distances mutuelles, qui aient la même intensité et soient également espacés, de manière que tous les pôles de même nom de ces aimants soient d'un même côté à la surface et que les droites qui joignent les pôles de chaque aimant aient leurs milieux dans cette surface et soient dirigés suivant les normales, il résulte des calculs que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie : 1° Que l'action exercée par cet assemblage d'aimants sur un pôle austral ou boréal d'un autre aimant, placé comme on le voudra relativement aux contours de la surface, est indépendante de la forme de cette surface et ne dépend que de son contour;

2° Que cette action est précisément la même que celle qui résulte de la formule par laquelle j'ai exprimé l'action mutuelle de deux éléments de conducteurs voltaïques, entre un courant électrique qui parcourrait le contour de la surface et l'extrémité d'un solénoïde électrodynamique situé au point où l'on suppose le pôle sur lequel agissent tous les aimants infiniment petits normaux à la surface.

Je vais d'abord démontrer ces deux théorèmes en partant uniquement de la loi des attractions et des répulsions des pôles de deux aimants infiniment petits, en raison inverse du carré des distances de ces pôles; j'exposerai ensuite quelques autres conséquences des calculs qui m'y ont conduit.

Prenons pour origine des coordonnées $x$, $y$, $z$ le pôle dont je viens de parler : soient $\delta p$ la portion de la normale comprise entre les deux pôles d'un des petits aimants; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les angles que cette normale forme avec les trois axes, $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ les différences entre les coordonnées respectivement correspondantes aux deux pôles; nommons enfin $r$ la droite menée de l'origine au point dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$, et $u$ celle qui joint la même origine à l'ordonnée verticale $z$, et représentons par $\varphi$ l'angle que cette dernière droite forme avec l'axe des $x$.

En représentant par $\mu$ l'intensité infiniment petite de la force magnétique d'un des petits aimants, $\frac{\mu z}{r^3}$ exprimera la composante suivant l'axe des $z$ de l'action exercée à l'origine par l'un de ses pôles et $\frac{\mu(z+\delta z)}{(r+\delta r)^3}$ celle de l'autre; il faudra retrancher celle-ci de la première, puisqu'elle agit en sens contraire : on aura ainsi

$$-\delta\frac{\mu z}{r^3} = \mu\left(\frac{3z\,\delta r}{r^4} - \frac{\delta z}{r^3}\right),$$

pour la force verticale restante.

Mais on a évidemment

$$\delta z = \delta p\cos\zeta, \quad r\,\delta r = x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = (x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta)\,\delta p,$$

et il est aisé de voir que $x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta$ est la somme des projections de $x$, $y$, $z$ sur la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à la surface au point dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$; en nommant $q$ cette perpendiculaire, on a donc

$$\delta r = \frac{q\,\delta p}{r},$$

et l'expression de la force que nous calculons devient

$$\mu\,\delta p\left(\frac{3zq}{r^5} - \frac{\cos\zeta}{r^3}\right),$$

Employons la caractéristique $d$ pour désigner les différentielles relatives au déplacement suivant la surface du point que nous considérons; nous aurons $\frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$ ou $\frac{u\,du\,d\varphi}{\cos\zeta}$ pour l'aire élémentaire de cette surface, et, comme les petits aimants y sont également espacés, le nombre de ceux qui se trouvent sur cette aire élémentaire, nombre par lequel il faut multiplier la valeur que nous venons de trouver pour la force verticale, pourra être représenté par

$$\frac{u\,du\,d\varphi}{\lambda\cos\zeta},$$

$\lambda$ étant une constante infiniment petite du second ordre qui représente la petite portion de surface correspondante à chaque aimant. On aura donc pour cette force, en tant qu'elle résulte de l'aire élémentaire,

$$\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,u\,du\,d\varphi\left(\frac{3zq}{r^5\cos\zeta}-\frac{1}{r^3}\right).$$

Mais $\frac{q}{\cos\zeta}$ est l'ordonnée verticale du plan tangent mené par l'origine, et il est aisé de voir que cette ordonnée est égale à $z-\frac{u\,dz}{du}$, puisque $u$ et $z$ sont les coordonnées de la section faite dans la surface par le plan vertical qui passe par l'axe des $z$ et par la droite $u$; et, comme

$$dz=\frac{r\,dr-u\,du}{z},$$

on trouvera

$$\frac{q}{\cos\zeta}=z-\frac{ru\,dr-u^2\,du}{z\,du}=\frac{r^2\,du-ru\,dr}{z\,du}.$$

En substituant cette valeur dans celle de la force, elle devient

$$\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,u\,d\varphi\left(\frac{3r^2\,du-3ru\,dr}{r^5}-\frac{du}{r^3}\right)=\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\left(\frac{2u\,du}{r^3}-\frac{3u^2\,dr}{r^4}\right)d\varphi,$$

qu'il faut intégrer dans toute l'étendue de la surface au moyen de deux intégrations successives qu'on peut exécuter dans l'ordre qu'on veut; en commençant par celle où $u$ et $r$ varient seuls dans les plans verticaux passant par l'axe des $z$ pour lesquels $d\varphi=0$, on trouve que l'intégrale s'obtient indépendamment de la relation entre $\varphi$, $u$ et $r$ que donnerait l'équation de la surface rapportée aux trois coordonnées $\varphi$, $u$ et $z=\sqrt{r^2-u^2}$; dès lors cette intégrale ne peut plus dépendre de la forme de la surface, mais seulement des valeurs de $u$ et de $r$ aux différents points de son contour qui sont donnés en fonction de $\varphi$ par les deux équations entre les mêmes coordonnées qui déterminent ce contour.

On a, par cette double intégration,

$$\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\int d\varphi \int\left(\frac{2u\,du}{r^3}-\frac{3u^2\,dr}{r^4}\right)=\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\int\left(\frac{u''^2\,d\varphi}{r''^3}-\frac{u'^2\,d\varphi}{r'^3}\right),$$

en nommant $u'$ et $u''$, $r'$ et $r''$ les valeurs de $u$ et de $r$ correspondantes aux deux points où le contour fermé donné rencontre les plans verticaux menés par l'axe des $z$, qui sont les deux limites de la première intégration et qui sont nécessairement de manière qu'il y en ait un sur chacune des deux branches dont ce contour est composé et qui sont séparées par ses points de contact avec les deux plans verticaux menés par l'axe des $z$, qu'il touche et entre lesquels il est situé; $u''^2\,d\varphi$ et $u'^2\,d\varphi$ sont évidemment les projections sur le plan des $zy$ des aires comprises entre un élément du contour et les deux rayons vecteurs qui en joignent les extrémités à l'origine; si donc on fait attention qu'en suivant l'angle $\varphi$ va en diminuant le long d'une des branches dont nous venons de parler, lorsqu'il est allé en augmentant le long de l'autre, d'où il résulte que $d\varphi$ change de signe quand on passe d'une de ces branches à l'autre, on reconnaîtra aisément que

$$\int\left(\frac{u''^2\,d\varphi}{r''^3}-\frac{u'^2\,d\varphi}{r'^3}\right)$$

est la somme de ces projections sur le plan des $xy$, divisée respectivement par les cubes des distances, somme qu'on peut écrire ainsi

$$\int\frac{x\,dy-y\,dx}{r^3},$$

et que j'ai nommée C dans le *Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques* (¹). En faisant les mêmes calculs relativement aux composantes de la même force suivant l'axe des $x$ et celui des $y$, et en continuant de désigner par B et A les quantités $\int\frac{z\,dx-x\,dz}{r^3}$, $\int\frac{y\,dz-z\,dy}{r^3}$, les quantités A, B, C étant aussi les

(¹) *Voir* page 36. (J.)

mêmes que j'ai désignées par ces lettres dans mon *Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques,* on trouve que les composantes suivant les trois axes des $x$, des $y$ et des $z$, sont respectivement

$$\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,A,\quad \frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,B,\quad \frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,C,$$

d'où il suit que le pôle de l'aimant qui est situé à l'origine est porté par l'action de la surface dans la direction de la droite qui forme avec les trois axes des angles dont les cosinus sont $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, en faisant toujours, pour abréger, $D=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, avec une force égale à $\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}\,D$, c'est-à-dire que l'action exercée sur ce pôle est précisément celle que, d'après ma formule, un circuit voltaïque parcourant le contour de la surface doit produire sur l'extrémité d'un solénoïde, telle que je l'ai déterminé pages 25 et 30 de mon *Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques,* excepté que le coefficient constant $\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}$ y est remplacé par cette autre constante $\frac{\pi m^2 ii'}{2g}$, ce qui n'établit aucune différence réelle entre ces deux cas, puisque l'on peut toujours supposer que les intensités des forces magnétiques des petits aimants, d'une part, et celle des courants électriques de l'autre, sont telles que ces constantes soient égales. On sait qu'il n'est pas nécessaire, pour arriver à ce résultat, que la longueur $\delta p$ d'un petit aimant, l'intensité $\mu$ de sa force magnétique et la petite portion $\lambda$ qu'il occupe sur la surface soient toutes trois constantes dans toute l'étendue de cette surface : il suffit que les petits aimants y soient distribués de manière que le rapport $\frac{\mu\,\delta p}{\lambda}$ y ait partout la même valeur.