

# JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

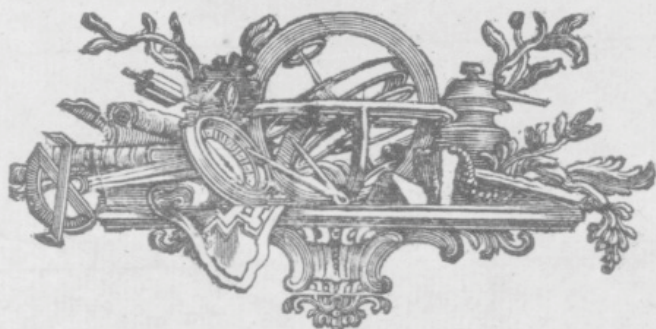
---

DIX-SEPTIÈME CAHIER.

---

TOME X.

*a Monsieur Demarteau*



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Janvier 1815.

*Per. 4°  
5699*



---

---

**CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES**  
**SUR LES INTÉGRALES**  
**DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.**

Lues à l'Institut le 11 Juillet 1814.

PAR A. M. AMPÈRE.

*NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS.*

**L**ES équations qui contiennent des différentielles, soit ordinaires, soit partielles, expriment, comme on sait, des relations entre les variables qui entrent dans ces équations, et les dérivées qui représentent les rapports des accroissemens infiniment petits qu'elles prennent lorsqu'on les fait varier conformément à la dépendance mutuelle que la nature de la question qu'on se propose de résoudre, établit entre elles.

Ces relations en supposent nécessairement entre les variables elles-mêmes; ces dernières sont exprimées par les intégrales primitives des équations différentielles, et par les solutions particulières primitives dont elles peuvent être susceptibles.

Je ne m'occuperai point, dans les recherches que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à la classe, des intégrales et des solutions particulières qu'on peut appeler intermédiaires, et qui expriment les relations

qui doivent exister entre les variables que l'on considère, et des dérivées de ces mêmes variables d'ordres inférieurs à celui de l'équation donnée; pour que cette équation puisse avoir lieu; je me suis proposé d'arriver directement aux intégrales primitives, et j'ai cru, pour mettre de l'ordre dans le travail que j'ai entrepris, devoir réserver pour un autre mémoire tout ce qui est relatif à cette manière de satisfaire aux équations différentielles, et me borner dans celui-ci à la recherche des intégrales primitives des équations aux différentielles partielles à deux variables indépendantes. Il ne peut y avoir de dérivées, ni par conséquent d'équations différentielles, qu'autant que les relations qui existent entre les quantités que l'on considère, permettent d'en faire varier une ou plusieurs à volonté, sans que ces relations cessent d'avoir lieu. Dans le premier cas, il n'y a qu'une variable indépendante dont toutes les autres sont des fonctions; c'est celui des équations aux différentielles ordinaires: dans le second, le nombre des variables indépendantes est déterminé par la nature de la question, et les équations sont aux différentielles partielles: dans l'un et l'autre cas, on peut toujours prendre à volonté la variable ou les variables qu'on regarde comme indépendantes. Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'il n'en résulte entre les variables que l'on considère et leurs dérivées à l'infini, que les relations exprimées par l'équation donnée, et par les équations qu'on en déduit en la différenciant.

Les intégrales et les solutions particulières, en même temps qu'elles établissent ces relations entre les variables et leurs dérivées, en établissent d'autres étrangères à la question, et elles n'en représentent par conséquent que des cas particuliers.

On distingue les intégrales particulières des solutions particulières, en ce que les premières peuvent être complétées de manière à produire une intégrale générale dans laquelle elles sont comprises, et que la même chose n'a pas lieu à l'égard des secondes, qui expriment des relations incompatibles avec celles que représentent les intégrales générales.

Pour que les intégrales puissent être générales, il faut, d'après cette définition, qu'elles contiennent des quantités arbitraires; afin qu'après les avoir éliminées entre l'intégrale et ses dérivées à l'infini, il ne reste que les relations exprimées par l'équation donnée et par ses dérivées.

Représentons par  $m$  l'ordre d'une équation aux différentielles ordinaires ou aux différentielles partielles, et par  $n$  un nombre quelconque plus grand que  $m$ ; si l'on différencie  $n$  fois l'intégrale primitive de cette équation, et qu'il en résulte  $h$  équations; si on la différencie ensuite elle-même  $n-m$  fois, et qu'il en résulte  $h'$  équations entre les mêmes dérivées, il faudra, d'après l'observation que nous venons de faire, pour que l'intégrale ait la même généralité que l'équation donnée; que les  $h$  équations obtenues dans la première opération contiennent  $h-h'$  arbitraires, afin qu'après l'élimination de ces arbitraires, il ne reste pas plus de  $h'$  équations.

On satisfait, par exemple, à l'équation  $px+qy=z$  (\*), en prenant  $z=Ax+By$ , équation qui contient deux constantes arbitraires, et qui donne la proposée lorsqu'on les élimine entre elle et ses deux dérivées; mais elle n'a point la même généralité, puisqu'en passant seulement au second ordre,  $px+qy=z$  ne donne que ces deux relations

$$xr + ys = 0,$$

$$xs + yt = 0,$$

tandis que  $z=Ax+By$  donne

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0,$$

valeurs qui satisfont à ces deux relations, mais qui n'en expriment qu'un cas particulier.

Il est aisé de voir, d'ailleurs, que les deux intégrales, dont l'une est représentée par  $z = x \int \frac{y}{x}$ , et l'autre par le système des deux équations

(\*) *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, tom. II, pag. 684.*

donnent  $z = ax + y\phi a$  et  $x + y\phi' a = 0$ ,

donnent seulement les deux relations

$$xr + ys = 0,$$

$$xs + yt = 0,$$

lorsqu'on élimine les fonctions arbitraires de leurs dérivées du second ordre; car on tire de la première

$$r = \frac{y^2}{x^3} \psi'' \frac{y}{x}, \quad s = -\frac{y}{x^2} \psi'' \frac{y}{x}, \quad t = \frac{1}{x} \psi'' \frac{y}{x},$$

d'où l'on ne peut déduire que ces deux relations et les équations qui en sont une suite nécessaire.

Les deux équations de l'autre intégrale donnent

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{y\phi'' a},$$

$$\frac{da}{dy} = \frac{1}{y^2\phi'' a},$$

$$p = a \quad \text{ou} \quad q = \phi a$$

d'où il est aisé de conclure

$$r = \frac{1}{y\phi'' a}, \quad s = \frac{1}{y^2\phi'' a}, \quad t = \frac{x^2}{y^3\phi'' a};$$

d'où résultent seulement entre  $r, s, t$ , les deux mêmes relations.

L'équation  $z = Ax + By$ , qui donne en outre  $r = 0$ , ne peut donc être qu'une intégrale ou une solution particulière de l'équation

$$px + qy = z.$$

D'après la théorie que M. Lagrange a donnée de cette sorte d'équations primitives, qu'il nomme *intégrales complètes*, il semble qu'on ne peut considérer  $z = Ax + By$  comme une intégrale particulière de

$$px + qy = z,$$

que

que dans le cas où l'on représente l'intégrale générale de cette dernière par

$$z = x \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

dont elle résulte évidemment, lorsque l'on donne à la fonction  $\psi$  cette forme particulière,

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = A + B \frac{y}{x};$$

mais qu'en prenant le système des deux équations

$$z = ax + y\phi a,$$

$$x + y\phi' a = 0,$$

pour l'intégrale générale, on ne peut plus regarder  $z = Ax + By$  comme une intégrale particulière, parce que, lorsqu'on donne à la fonction  $\phi$  cette forme,

$$\phi a = B + K(a - A),$$

qui y correspond, le système de ces deux équations devient

$$z = ax + By + Ky(a - A)$$

et

$$x + Ky = 0,$$

dont la seconde réduit bien la première à

$$z = Ax + By;$$

mais non pas comme il arrive pour toutes les autres formes de la fonction  $\phi$  par l'élimination de  $a$ , à cause qu'il ne reste point de  $a$  dans la seconde équation. C'est l'élimination de  $k$  qui remplace alors celle de  $a$ : cependant comme le reste du calcul est absolument le même, et que  $k$  est entièrement arbitraire aussi bien que  $a$ , il me semble qu'on doit toujours regarder les équations primitives, telles que

$$z = Ax + By,$$

auxquelles M. Lagrange a donné le nom d'intégrales complètes, comme des intégrales particulières. On voit, en effet, dans l'exemple précédent, que  $z = Ax + By$  se déduit également de l'intégrale générale représentée par  $z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ ; lorsqu'on prend  $\psi\frac{y}{x} = A + B\frac{y}{x}$ , et de la même intégrale représentée par les deux équations

$$z = ax + y\phi a,$$

$$x + y\phi' a = 0,$$

lorsqu'on prend

$$\phi a = B + K(a - A).$$

Voyons maintenant comment on peut en général satisfaire à la condition que les  $h$  équations déduites de l'intégrale primitive par  $n$  différenciations, contiennent  $h - h'$  arbitraires, et observons que  $h$  équations peuvent bien se réduire à  $h'$  équations, soit qu'il y ait  $h - h'$  arbitraires, soit qu'il y ait plus, mais jamais quand il y a moins.

Si l'on n'y a qu'une seule variable indépendante, on n'obtiendra par la différenciation qu'une seule équation nouvelle d'une équation déjà obtenue, lorsqu'on passera d'un ordre de différentielles à l'ordre suivant. L'intégrale primitive pouvant toujours, dans ce cas, être exprimée par une seule équation, on aura donc

$$h = n + 1, \quad h' = n - m + 1,$$

ce qui donne  $h - h' = m$ ; il faudra donc un nombre  $= m$ , et par conséquent constant, de quantités arbitraires dans l'intégrale primitive, et les équations qu'on en déduit par la différenciation. On satisfera à cette condition par  $m$  constantes arbitraires, et on n'aura jamais à éliminer entre l'intégrale et ses dérivées que ces  $m$  constantes, parce que les différenciations ne peuvent que faire évanouir celles qui ne sont multipliées par aucune quantité variable dans l'intégrale, ou dans l'équation qui résulte des différenciations précédentes, et non en introduire de nouvelles.

Mais, lorsque l'équation donnée est aux différentielles partielles, le nombre  $h \rightarrow h'$  va en augmentant à l'infini avec celui des différenciations; d'où il suit qu'une équation primitive qui y satisfierait et qui ne contiendrait qu'un nombre fini d'arbitraires constantes, ne pourrait jamais en être une intégrale générale. Par exemple, dans le cas où il y a seulement deux variables indépendantes, et où l'intégrale primitive est représentée par une seule équation, on a, en différenciant  $n$  fois cette intégrale,

$$h = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

pour le nombre des équations qui en résultent, et en différenciant  $n - m$  fois l'équation donnée,

$$h' = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}$$

pour celui des équations résultant de ses différenciations: le nombre des arbitraires à éliminer ne pourra donc, pour que l'intégrale soit générale, être moindre que

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1-m)(n+2-m)}{2} = m \frac{2n+3}{2} - \frac{m^2}{2} \\ = m(n+1) - \frac{m(m-1)}{2},$$

qui croît à l'infini avec  $n$ .

Toute intégrale d'une équation aux différentielles partielles qui n'est pas composée d'un nombre infini de termes, ne peut donc être générale, à moins qu'elle ne contienne des arbitraires dont le nombre augmente lorsqu'on différencie.

Il y a dans l'état actuel de l'analyse deux sortes d'expressions qui jouissent de cette propriété, les *fonctions arbitraires* et les *intégrales partielles* contenant des fonctions arbitraires.

Je me sers de la dénomination d'intégrales partielles dans le même sens qu'on emploie celle de différentielles partielles, pour désigner les intégrales des fonctions de plusieurs quantités  $x, y, z, \&c.$  prises en ne

considérant comme variable que celle dont la différentielle se trouve sous le signe d'intégration. Ainsi l'intégrale partielle de  $(z + xy)dx$ , prise depuis  $x=0$ , est  $zx + \frac{x^2 y}{2}$ , quelque relation qui existe entre  $x, y, z$ , tandis que l'intégrale totale de la même fonction suppose entre ces trois quantités deux relations, en vertu desquelles  $y$  et  $z$  soient fonctions de  $x$ ; ce sera, par exemple, en prenant de même cette intégrale depuis  $x=0$ ,

$$\frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + bl \left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

si l'on a

$$z = x^3 \quad \text{et} \quad y = a + \frac{b}{x^2 + cx},$$

au lieu que l'intégrale partielle deviendrait par la substitution de ces valeurs,

$$x^4 + \frac{ax^2}{2} + \frac{bx}{2(x+c)}$$

Je distinguerai donc d'abord deux sortes de quantités arbitraires dans les intégrales primitives des équations aux différentielles partielles, les fonctions arbitraires dégagées de tout signe d'intégration, ou qui ne se trouvent sous un tel signe qu'avec des constantes, la quantité dont elles sont composées et la différentielle de cette quantité, ce qui ne constitue pas une intégrale partielle; parce que ces intégrales doivent alors être prises sans regarder comme constante aucune quantité réellement variable d'après la nature de la question qui a conduit à l'équation donnée, et les intégrales partielles contenant des fonctions arbitraires. Ces deux sortes de quantités arbitraires se subdivisent chacune en deux autres: on doit distinguer,

1.° Les fonctions arbitraires que je nommerai *explicites*, et qui sont composées d'une quantité dont la valeur est donnée en fonctions des variables  $x, y, z$ , contenues dans l'intégrale primitive;

2.° Les fonctions arbitraires que je nommerai *implicites*, et qui sont composées de quantités dont la valeur en fonction de  $x, y, z$  varie avec la forme qu'on donne à volonté à la fonction arbitraire. On sait, par exemple, que le système des deux équations

$$z = (x + a)(y + \phi a),$$

et

$$y + \phi a + (x + a)\phi a = 0,$$

représente l'intégrale de l'équation

$$z = pq;$$

et il est évident que si l'on prend, par exemple,  $\phi a = a$ , ce qui donne pour l'intégrale particulière correspondante,

$$z = \frac{(y-x)^2}{4},$$

la valeur de  $a$  sera  $a = -\frac{y+x}{2}$ , et que si l'on fait  $\phi a = \frac{1}{a}$ ,

ce qui change l'intégrale, en

$$z = (1 + \sqrt{xy})^2,$$

on aura

$$a = \sqrt{\frac{x}{y}},$$

valeur absolument différente de la précédente.

3.° Les intégrales partielles indéfinies qui ne contiennent, sous le signe  $\int$  que des fonctions explicites ou implicites de  $x, y, z$ .

4.° Les intégrales partielles définies où les mêmes variables se trouvent combinées sous le signe  $\int$  avec une autre variable indépendante, dont la différentielle multiplie tout ce qui se trouve sous ce signe, qui est considéré comme seule variable dans l'intégration qu'il indique, et dont les valeurs en  $x, y, z$ , ou en constantes déterminées, sont données seulement aux deux limites de l'intégrale.

On peut diviser les intégrales primitives en plusieurs classes, suivant qu'elles ne renferment qu'une seule de ces différentes espèces de quantités arbitraires, ou qu'elles en renferment de plusieurs espèces. Celles où il ne se trouve pas d'intégrales partielles; de quelque nature que soient d'ailleurs les fonctions arbitraires et les fonctions qui en dérivent par voie de différenciation ou d'intégration non partielle, jouissent de propriétés particulières; et devant, sous plusieurs rapports, être considérées à part, je les réunirai dans une classe, et je les désignerai sous le nom d'*intégrales de la première classe*. Il existe entre les fonctions arbitraires qui ne sont point comprises sous des signes d'intégrations partielles et celles qui en sont affectées, une différence bien remarquable, savoir que, dans le premier cas, une différenciation faite dans l'hypothèse que la quantité dont se compose une fonction arbitraire est constante, ne peut introduire dans le calcul aucune nouvelle arbitraire dérivée de cette fonction; mais que la même opération en introduit au contraire de nouvelles, quand cette fonction est comprise dans une intégrale partielle, parce que les dérivées d'une telle intégrale relativement aux variables qui y sont considérées comme constantes, sont autant d'arbitraires qu'il faut éliminer séparément. Nous verrons dans la suite de ces recherches combien cette différence en met entre les intégrales de la première classe et celles qui contiennent des intégrales partielles. Pour rendre plus simples les considérations qui vont suivre, il faut voir d'abord comment on peut réduire à une même forme les intégrales de différentes espèces, pour que les raisonnemens et les démonstrations relatifs à cette forme s'appliquent indistinctement à toutes les intégrales des équations aux différentielles partielles.

Lorsqu'elles ne contiennent point l'intégrale partielle, on les ramène avec la plus grande facilité à une forme commune qui est celle d'un système d'autant d'équations plus une qu'il y a de quantités différentes dont les fonctions arbitraires de ces intégrales sont composées; c'est sous cette forme que se présentent les intégrales à fonctions implicites, et on y ramène les intégrales à fonctions explicites; en substituant aux

quantités dont se composent les fonctions arbitraires des lettres telles que  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ , afin de n'avoir plus qu'une seule lettre sous chaque signe de fonction, et en joignant à l'intégrale, après qu'on y a fait cette substitution, les équations qui donnent les valeurs de ces lettres en fonctions de  $x, y, z$ .

C'est ainsi, par exemple, que pour mettre l'intégrale de l'équation

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

qui est, comme on sait,

$$z = \Phi(y+x) - x\Phi'(y+x) + \Psi(y-x) + x\Psi'(y-x),$$

sous la forme générale dont nous venons de parler, il suffit de la représenter par le système des trois équations

$$z = \Phi\alpha - x\Phi'\alpha + \Psi\beta + x\Psi'\beta,$$

$$y = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Cette forme est sans doute moins simple que celle de la même intégrale représentée par une seule équation; mais elle a l'avantage d'être commune aux intégrales de la première classe, de quelque espèce qu'elles soient; c'est pourquoi je supposerai que toutes les intégrales de cette classe y ont été ramenées, lorsque j'aurai à les considérer d'une manière générale.

On peut aussi donner une forme commune à toutes les intégrales partielles: il faut pour cela, lorsqu'elles sont indéfinies, y introduire une nouvelle quantité  $u$ , telle qu'il ne reste plus d'autres différentielles sous le signe  $\int$  que celle de cette quantité. L'intégration est alors relative à  $u$  seul; mais on ne peut plus la regarder comme indéfinie, parce que  $u$  ayant été substitué à une fonction déterminée de  $x, y, z$ , doit reprendre au commencement et à la fin de l'intégrale les valeurs

que doit y avoir cette fonction, valeurs qui se trouvent ainsi les deux limites de l'intégrale définie relative à  $u$ , par laquelle on a remplacé l'intégrale indéfinie.

Avant d'éclaircir cette dernière considération par un exemple, je crois devoir prévenir que j'accompagnerai toute équation où entrera une intégrale définie, de l'indication entre deux crochets, des limites dans lesquelles cette intégrale doit être prise; en sorte que, si l'on a, par exemple,

$$z = F(x, y, u, \int V du),$$

où  $V$  peut contenir  $x, y, u$ , et que l'intégrale  $\int V du$  doive être prise depuis  $u = \alpha$  jusqu'à  $u = \beta$ , j'écrirai cette équation ainsi

$$z = F(x, y, u, \int V du); [u = \alpha, u = \beta].$$

(Je me servirai dans tout ce mémoire, comme on le fait ordinairement, des lettres  $F, f, f$ , pour désigner les fonctions déterminées, et je réserverai les lettres grecques  $\Phi, \chi, \psi, \vartheta$ , pour l'indication des fonctions arbitraires.)

Il m'a semblé aussi que les calculs qui vont suivre exigeaient que je rappelasse ici, et que je misse sous la forme la plus convenable à ces calculs, une formule sur laquelle repose la différenciation des intégrales partielles.

Si l'on substitue  $x + h$  à  $x$  dans  $\int V du; [u = \alpha, u = \beta]$ , cette quantité deviendra

$$\left( \int V du + h \int \frac{dV}{dx} du + \frac{h^2}{2} \int \frac{d^2 V}{dx^2} du + \&c., \right.$$

$$\left. [u = \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \frac{d^2 \alpha}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \&c., u = \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \frac{d^2 \beta}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \&c.] \right)$$

Pour connaître le changement qu'éprouve  $\int V du, [u = \alpha, u = \beta]$ , en devenant

$$\int V du, [u = \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \&c., u = \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \&c.,]$$

premier

premier terme de cette valeur, on remarquera que si l'on représente  $\int V du$  considérée comme indéfinie par  $f(x, y, u)$ , la première intégrale définie  $\int V du, [u = \alpha, u = \beta]$ , sera représentée par

$$f(x, y, \beta) - f(x, y, \alpha),$$

la seconde par

$$\begin{aligned} & f\left(x, y, \beta + \frac{d\beta}{dx} h + \& c.\right) - f\left(x, y, \alpha + \frac{d\alpha}{dx} h + \& c.\right) \\ &= f(x, y, \beta) - f(x, y, \alpha) + \frac{df(x, y, \beta)}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} h - \frac{df(x, y, \alpha)}{d\alpha} \\ & \frac{d\alpha}{dx} h + \& c. = \int V du + V_\beta \frac{d\beta}{dx} h - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx} h + \& c. [u = \alpha, u = \beta], \end{aligned}$$

en désignant par  $V_\alpha$  et  $V_\beta$  ce que devient  $V = \frac{df(x, y, u)}{du}$ , quand on y met successivement  $\alpha$  et  $\beta$  à la place de  $u$ ; on aura donc pour la valeur que prend  $\int V du [u = \alpha, u = \beta]$ , quand  $x$  devient  $x + h$ ,

$$\begin{aligned} & \int V du + h \left( V_\beta \frac{d\beta}{dx} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx} \right) + \& c. + h \int \frac{dV}{dx} du \\ & + h^2 \left( \frac{dV_\beta}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dx} - \frac{dV_\alpha}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \right) + \& c. [u = \alpha, u = \beta], \end{aligned}$$

et pour le coefficient  $\frac{d\int V du, [u = \alpha, u = \beta]}{dx}$  de  $h$  dans cette valeur,

$$\frac{d\int V du}{dx} = V_\beta \frac{d\beta}{dx} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \int \frac{dV}{dx} du, [u = \alpha, u = \beta];$$

on démontrera de même que

$$\frac{d\int V du}{dy} = V_\beta \frac{d\beta}{dy} - V_\alpha \frac{d\alpha}{dy} + \int \frac{dV}{dy} du, [u = \alpha, u = \beta].$$

Si nous prenons maintenant pour exemple de la transformation dont nous avons parlé tout-à-l'heure, l'intégrale de

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

telle qu'on la trouve dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* de M. Lacroix, art. 757, et que nous y écrivions,

$$2\Phi(a - 2x) \text{ au lieu de } \Phi(a - 2x),$$

pour éviter les fractions, nous aurons

$$z = e^{-\frac{2x}{a}} \left( \int e^{\frac{2x}{a}} \frac{2dx}{a} \Phi(a - 2x) + \downarrow a \right),$$

où  $a$  est une constante pendant l'intégration, qu'il faut, après cette opération, remplacer par  $x+y$ .

Pour exprimer cette condition, d'après la notation dont nous sommes convenus, on fera  $u = \frac{2x}{a}$ ; d'où

$$du = \frac{2dx}{a} \text{ et } a - 2x = a(1 - u),$$

ce qui la changera en

$$z = e^{-\frac{2x}{a}} \left( \int e^u du \Phi[a(1 - u)] + \downarrow a \right),$$

où l'on peut remplacer  $a$  par  $x+y$ , en considérant le signe  $\int$  de cette intégrale comme se rapportant à  $u$ , ainsi qu'on le suppose toujours dans les intégrales partielles, puisque c'est la différentielle  $du$  qui est sous ce signe: on aura donc

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}} \left( \int e^u du \Phi[(x+y)(1 - u)] + \downarrow (x+y) \right).$$

La limite supérieure de cette intégrale est  $u = \frac{2x}{x+y}$ ; quant à la limite inférieure, pour qu'il n'en résulte aucun terme dans les dérivées de  $z$  qui l'empêche de satisfaire à l'équation donnée, il faut qu'elle soit constante dans l'hypothèse de relation entre  $x$  et  $y$ , d'après laquelle l'intégrale a été prise: toute fonction de  $x+y$  satisfera à cette condition; en sorte que les limites seront

$$u = \varepsilon(x+y) \quad \text{et} \quad u = \frac{2x}{x+y}.$$

Si l'on représente, pour un moment,

$$\int e^u du \Phi[(x+y)(1-u)] \quad \text{par} \quad F(x+y, U),$$

où  $F$  est une fonction en partie déterminée, lorsque cette intégration est prise, par exemple, de  $u = 0$  à  $u = U$ , on aura

$$F\left(x+y, \frac{2x}{x+y}\right) - F\left(x+y, \varepsilon(x+y)\right)$$

pour la valeur de cette intégrale prise entre les limites  $\varepsilon(x+y)$  et  $\frac{2x}{x+y}$ ; le second terme de cette valeur sera une fonction entièrement arbitraire de  $x+y$ , puisque  $\varepsilon$  en est une: la quantité  $\Phi(x+y)$ , qui est ajoutée à

$$\int e^u du \Phi[(x+y)(1-u)],$$

pourra donc être comprise dans  $F(x+y, \varepsilon(x+y))$ , en laissant  $\varepsilon$  arbitraire. On conservera ainsi à l'intégrale précédente toute sa généralité, en supprimant le terme  $\Phi(x+y)$ , et en écrivant les limites comme il suit, d'après la notation dont nous sommes convenus,

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}} \int e^u du \Phi[(x+y)(1-u)], \quad \left[ u = \varepsilon(x+y), u = \frac{2x}{x+y} \right].$$

Pour vérifier cette intégrale, on aura recours aux valeurs que nous avons trouvées pour  $\frac{dfV du}{dx}$ ,  $[u = \alpha, u = \beta]$ ; en la représentant donc par

$$z = e^{-\frac{2x}{x+y}} \int V du, \quad \left[ u = \varepsilon(x+y), u = \frac{2x}{x+y} \right],$$

on aura à la première limite ou  $\alpha = \varepsilon(x+y)$ ,

$$(x+y)(1-\alpha) = \chi(x+y),$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \varepsilon'(x+y), \quad \frac{d\alpha}{dy} = \varepsilon'(x+y),$$

et à la seconde on  $\beta = \frac{2x}{x+y}$ ,

$$(x+y)(1-\beta) = y-x;$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

On trouvera ainsi

$$\frac{dfVdu}{dx} = e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2y}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{\vartheta(x+y)} \chi(x+y) \vartheta'(x+y) + \int e^u du (1-u) \Phi'[(x+y)(1-u)],$$

$$\left[ u = \vartheta(x+y), \quad u = \frac{2x}{x+y} \right],$$

et

$$\frac{dfVdu}{dy} = -e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2x}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{\vartheta(x+y)} \chi(x+y) \vartheta'(x+y) + \int e^u du (1-u) \Phi'[(x+y)(1-u)],$$

$$\left[ u = \vartheta(x+y), \quad u = \frac{2x}{x+y} \right];$$

mais la valeur de  $z$  donne

$$p = e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2y}{(x+y)^2} \int V du + e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{dfVdu}{dx},$$

$$q = e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{2x}{(x+y)^2} \int V du + e^{-\frac{2x}{x+y}} \frac{dfVdu}{dy};$$

on aura donc, à cause de  $e^{-\frac{2x}{x+y}} \int V du = z$ , et en supprimant l'indication des limites, pour abrégé,

$$p = \frac{2yz}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{\vartheta(x+y)} \frac{2x}{x+y},$$

$$\chi(x+y) \vartheta'(x+y) + \int e^u du (1-u) \Phi'[(x+y)(1-u)].$$

$$q = \frac{2xz}{(x+y)^2} + \frac{2x}{(x+y)^2} \Phi(y-x) - e^{\gamma(x-y)} - \frac{2x}{x+y},$$

$$\gamma'(x+y) + \int e^u du (1-u) \Phi'[(x+y)(1-u)].$$

En éliminant l'intégrale définie contenue dans ces valeurs, les fonctions arbitraires de  $x+y$  disparaîtront en même temps, et l'on aura

$$p + q = \frac{2z}{x+y} = \frac{2\phi(y-x)}{x+y},$$

d'où l'on tirera immédiatement l'équation donnée

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

puisque celle que nous venons d'obtenir en est l'intégrale première, telle qu'elle se trouve dans l'ouvrage cité, au coefficient près; que nous avons ajouté à la fonction arbitraire désignée par  $\Phi$ , dans la vue de simplifier un peu le calcul.

Au reste, on regarde avec raison la forme d'intégrale indéfinie sous laquelle nous avons l'intégrale de l'équation

$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0,$$

comme plus simple que celle que nous venons de lui donner. Mais cette dernière est la seule sous laquelle on puisse comprendre toutes les intégrales partielles, et cette considération conduit à reconnaître la forme générale qui réunit toutes celles que peuvent affecter les intégrales des équations aux différentielles partielles, connues jusqu'à présent, à l'exception des intégrales en série, dont nous ne nous occupons point dans ces recherches.

Pour se faire une idée nette de cette forme générale, on supposera, 1.<sup>o</sup> qu'on a représenté par des lettres telles que  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$  les quantités dont se composent les fonctions arbitraires dégagées de signes d'intégration partielle, quantités dont nous supposons que  $k$  désigne le nombre; en sorte que  $k$  sera nul, quand il n'y aura dans

l'intégrale des fonctions arbitraires, que sous des signes d'intégrations partielles; 2.<sup>o</sup> qu'on représente par d'autres lettres, par exemple, par  $u, v, w, \&c.$  les quantités auxquelles se rapportent les signes d'intégration des intégrales partielles  $\int U du, \int V dv, \&c.$ , soit que ces intégrales soient définies ou indéfinies. Je désignerai le nombre de ces quantités, ou, ce qui est la même chose, le nombre des intégrales partielles indépendantes entre elles, contenu dans l'intégrale primitive, par  $k'$ . Il est évident qu'alors l'intégrale primitive sera composée, 1.<sup>o</sup> de  $k'+1$  équations, entre lesquelles doivent être éliminées les  $k$  quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ , après que les fonctions arbitraires ont été déterminées, et qu'on a exécuté les intégrations partielles; j'appellerai ces  $k'+1$  équations les équations principales de l'intégrale: 2.<sup>o</sup> de  $2k'$  équations donnant pour les  $k'$  quantités  $u, v, w, \&c.$  les deux valeurs que chacune d'elles a aux deux limites de l'intégrale partielle correspondante. Ces  $2k'$  équations, que j'écrirai à la suite des premières entre deux crochets d'après la notation convenue, seront désignées dans ce mémoire sous le nom d'*équations accessoires de l'intégrale*. C'est à cette forme générale que je supposerais ramenées toutes les intégrales dans les recherches qui vont suivre.

Parmi les équations principales d'une intégrale primitive, il peut se trouver des équations aux différentielles ordinaires, ramenées par l'élimination à ne contenir que deux variables, et leurs dérivées mutuelles avec une troisième variable qui doit être regardée comme constante pendant l'intégration de ces équations, intégration qui ne peut alors s'effectuer qu'après une détermination particulière des fonctions arbitraires. Dans ce cas, les constantes arbitraires qu'introduira cette intégration doivent être comptées pour autant de fonctions arbitraires de la troisième variable. Au reste, cette circonstance n'apporte aux considérations dont nous allons nous occuper, que des modifications si légères et si faciles à suppléer, que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

## S. II.

*CONSIDÉRATIONS sur la manière dont les Différenciations successives introduisent dans le Calcul de Nouvelles arbitraires dérivées des Fonctions arbitraires contenues dans une Intégrale quelconque, lorsque ces Fonctions n'y entrent point sous des signes d'Intégration partielle.*

EN partant d'un système de  $k+1$  équations principales, composant une intégrale primitive, et en passant aux dérivées du premier ordre, on aura  $2(k+1)$  équations de cet ordre, dans lesquelles, outre les quantités contenues dans l'intégrale, se trouveront  $p, q$  et  $2k$  quantités telles que

$$\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \&c.;$$

en sorte qu'après avoir éliminé ces quantités, il restera deux équations qui donneront les valeurs de  $p$  et de  $q$ . Les équations dérivées du second ordre seront au nombre de  $3(k+1)$ , et contiendront en outre  $r, s, t$  et  $3k$  quantités telles que

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}, \frac{d^2\alpha}{dx dy}, \frac{d^2\alpha}{dy^2}, \frac{d^2\beta}{dx^2}, \frac{d^2\beta}{dx dy}, \frac{d^2\beta}{dy^2}, \&c.;$$

en sorte qu'après les avoir éliminées et avoir remplacé

$$p, q, \frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \&c.,$$

par les valeurs déjà trouvées pour ces quantités, on aura trois équations qui donneront celles de  $r, s, t$ .

En continuant ces opérations jusqu'à l'ordre quelconque  $n$ , on déterminera des valeurs de toutes les dérivées de  $z$  jusqu'à cet ordre, qui ne renfermeront que les quantités contenues dans l'intégrale, à l'exception des nouvelles fonctions arbitraires dérivées de celles de l'intégrale.

Il est évident qu'en continuant suffisamment les différenciations, il s'en présentera nécessairement dans les dérivées de  $z$ ; et sans cela d'ailleurs les intégrales, d'après ce que nous avons dit, ne pourraient pas plus être générales que si elles ne contenaient qu'un nombre fini de constantes arbitraires : mais cette introduction de nouvelles fonctions arbitraires peut n'avoir pas lieu dans les valeurs des premières dérivées de  $z$ , parce que l'élimination de

$$\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \&c., \frac{d^2\alpha}{dx^2}, \frac{d^2\alpha}{dx dy}, \frac{d^2\alpha}{dy^2}, \frac{d^2\beta}{dx^2}, \&c.,$$

peut faire disparaître celles qui résulteraient des premières différenciations.

Si l'on a, par exemple, le système de ces deux équations,

$$z = \alpha \sqrt{x^2 - b^2} + (2\phi\alpha - \alpha\phi'a)x,$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - b^2} + x\phi'a}{\alpha},$$

on en tirera

$$p = \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 - b^2}} + 2\phi\alpha - \alpha\phi'a + [\sqrt{x^2 - b^2} + (\phi'a - \alpha\phi''a)x] \frac{d\alpha}{dx},$$

$$q = [\sqrt{x^2 - b^2} + (\phi'a - \alpha\phi''a)x] \frac{d\alpha}{dy},$$

$$0 = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2 - b^2}} + \frac{\phi'a}{\alpha} + \frac{\alpha x\phi''a - \sqrt{x^2 - b^2} - x\phi'a}{\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dx},$$

$$1 = \frac{\alpha x\phi''a - \sqrt{x^2 - b^2} - x\phi'a}{\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dy};$$

ainsi,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 - b^2}} + \alpha\phi'a}{\sqrt{x^2 - b^2} + x(\phi'a - \alpha\phi''a)},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{x^2 - b^2} + x(\phi'a - \alpha\phi''a)},$$

$$p = \frac{2ax}{\sqrt{x^2 - b^2}} + 2\Phi a,$$

$$q = -a^2,$$

où les valeurs de  $p$  et de  $q$  ne contiennent aucune nouvelle fonction arbitraire.

A l'égard du système de deux équations que nous avons pris pour exemple, il est évident que c'est l'intégrale complète de l'équation du premier ordre qu'on obtiendrait en éliminant  $a$ ,  $\Phi a$  et  $\Phi' a$  entre les quatre équations qui fournissent les valeurs de  $y$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $q$ .

Il est facile, dans cet exemple, de transformer ce système en un autre dont une équation soit la dérivée de l'autre relativement à  $a$  seul; on trouverait

$$z + a^2 y = 2a\sqrt{x^2 - b^2} + 2x\Phi a,$$

$$ay = \sqrt{x^2 - b^2} + x\Phi' a;$$

mais ce n'est pas ici le lieu de montrer comment on doit s'y prendre pour faire en général cette transformation de la manière la plus simple, et d'examiner si elle est toujours possible. Nous reviendrons sur cette question dans un des paragraphes suivans.

Pour résoudre toutes les questions qu'on peut se proposer sur la manière dont les nouvelles fonctions arbitraires naissent des différenciations, nous nommerons  $a$  la quantité dont une des fonctions arbitraires est composée, et nous supposerons que  $a$  ne dépend ni de  $x$  seul, ni de  $y$  seul, nous réservant d'examiner ensuite le cas où l'intégrale contient une ou plusieurs fonctions de  $x$  seul, ou de  $y$  seul; alors nous pourrons prendre  $a$  pour l'une des deux variables indépendantes, l'autre étant l'une des deux qui l'étaient auparavant,  $x$  ou  $y$ ; si c'est, par exemple,  $x$  que nous prenons avec  $a$  pour les deux variables indépendantes,  $y$  sera, comme toutes les autres quantités qui entrent dans l'intégrale primitive, une fonction de  $x$  et de  $a$ ; le nombre des autres quantités,  $\beta$ ,  $\gamma$ , &c. dont se composent

les fonctions arbitraires étant  $k - 1$ . En y joignant  $y$  et  $z$ , on aura  $k + 1$  fonctions de  $x$  et de  $\alpha$ ; et comme l'intégrale se compose de  $k + 1$ , et donne en la différenciant dans cette hypothèse,  $2(k + 1)$  équations, on pourra tirer de celles-ci les valeurs de

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{d\alpha}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \&c.$$

On pourrait aussi, en différenciant dans la même hypothèse les valeurs de  $p, q, r, s, \&c.$  dont nous venons de parler, et en éliminant

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{d\alpha}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \&c.,$$

trouver les valeurs de

$$\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{d\alpha}, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{d\alpha}, \frac{dr}{dx}, \frac{dr}{d\alpha}, \&c.$$

Ces dérivées relatives à  $x$  et  $\alpha$ , auront avec celles de  $z$ , par rapport à  $x$  et  $y$ , dont elles sont déduites, des relations dont nous allons nous occuper; mais comme elles se trouveront souvent mêlées, dans le cours de ce mémoire, avec des dérivées prises dans d'autres hypothèses, je me suis vu forcé d'adopter une notation, à l'aide de laquelle je pusse distinguer les dérivées prises dans différentes hypothèses de différenciation; si  $u$  est une des quantités qui entrent dans l'intégrale ou dans ses dérivées,  $\frac{du}{dx(\alpha)}$  et  $\frac{du}{d\alpha(x)}$  (\*) exprimeront les dérivées de  $u$  relatives à  $x$  et  $\alpha$ ; et  $\frac{du}{dx(y)}$ ,  $\frac{du}{dy(x)}$ ; les dérivées de  $u$ , quand  $x$  et  $y$  sont les variables indépendantes.

---

(\*) Je pouvais d'autant moins me passer de cette distinction entre les deux dérivées que je représente par  $\frac{du}{dx(\alpha)}$  et  $\frac{du}{d\alpha(x)}$ , que, d'après la notation ordinaire, elles sont exprimées par le même signe, quoique de valeurs différentes, et que j'aurai souvent à écrire dans ce mémoire des équations où des dérivées de ce genre entrent à-la-fois. À l'égard des différentielles prises en considérant comme indépendantes toutes les quantités qui entrent dans une expression algébrique, je les désignerai en en renfermant l'expression entre deux pa-

Cette notation convenue, supposons qu'une nouvelle fonction de  $a$ , produite par les différenciations successives de l'intégrale primitive, commence à paraître pour la première fois dans une des dérivées de  $z$  de l'ordre  $n$ ; nommons  $u$  et  $v$  les deux dérivées correspondantes de l'ordre immédiatement inférieur  $n-1$ , en sorte que cette dérivée soit également représentée par  $\frac{du}{dy(x)}$  et par  $\frac{dv}{dx(y)}$ ; je dis que cette nouvelle fonction se trouvera aussi dans les valeurs des deux dérivées de l'ordre  $n$ , dont l'une la précède et l'autre la suit, et qui sont représentées, la première par  $\frac{du}{dx(y)}$ , la seconde par  $\frac{dv}{dy(x)}$ .

Pour le démontrer, je remarquerai,

1.° Que, puisqu'on suppose que cette nouvelle fonction n'a point paru dans les équations qu'on a dérivées successivement de l'intégrale jusqu'à l'ordre  $n-1$ , ni à plus forte raison dans celle dont se compose cette intégrale, elle n'entrera ni dans les valeurs de  $u$  et de  $v$  tirées des premières, ni dans celles de  $y$  tirées des secondes, ni par conséquent

renthèses; en sorte que si  $v$  est par exemple une fonction de  $x, y, z, a$  et  $\phi a$ , l'expression de  $\frac{dv}{dx(a)}$  représentera la quantité

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) \frac{dy}{dx(a)} + \left(\frac{dv}{dz}\right) \frac{dz}{dx(a)}$$

$\frac{dv}{da(x)}$  la quantité

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) \frac{dy}{da(x)} + \left(\frac{dv}{dz}\right) \frac{dz}{da(x)} + \left(\frac{dv}{da}\right) + \left(\frac{dv}{d\phi}\right) \phi' a,$$

tandis que  $\frac{dv}{dx(y)}$  représentera

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dz}\right) \frac{dz}{dx(y)} + \left[\left(\frac{dv}{da}\right) + \left(\frac{dv}{d\phi}\right) \phi' a\right] \frac{da}{dx(y)}$$

et  $\frac{dv}{dy(x)}$  la quantité

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dz}\right) \frac{dz}{dy(x)} + \left[\left(\frac{dv}{da}\right) + \left(\frac{dv}{d\phi}\right) \phi' a\right] \frac{da}{dy(x)}$$

dans les valeurs de  $\frac{du}{dx(a)}$ ,  $\frac{dy}{dx(a)}$ ,  $\frac{dy}{dx(a)}$ ; puisqu'elles résultent de différenciations où  $a$  est considéré comme constant; et où toutes les fonctions de cette quantité se comportent, par conséquent, comme des constantes;

2.° Que la dérivée  $\frac{dy}{dx(a)}$  ne pourra être ni nulle ni infinie; car si elle était nulle, on aurait  $y = \gamma a$ , et toute fonction arbitraire de  $a$  le serait aussi de  $y$  seul, ce qui est contre la supposition; et si elle était infinie, on aurait, à cause que  $\frac{dy}{dx(a)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy(a)}}$ ,  $y$  et  $a$  étant considérées dans cette dernière dérivée comme les deux variables indépendantes, l'équation  $\frac{dx}{dy(a)} = 0$ , d'où l'on tirerait  $x = \downarrow a$ ; en sorte que toute fonction de  $a$  le serait de  $x$  seul, ce qui est encore contraire à la supposition.

Cela posé, la différentielle totale de  $u$  étant également représentée par

$$\frac{du}{dx(a)} dx + \frac{du}{da(x)} da$$

et par

$$\frac{du}{dx(y)} dx + \frac{du}{dy(x)} \left( \frac{dy}{dx(a)} dx + \frac{dy}{da(x)} da \right);$$

ces deux expressions seront égales; et comme on sait par la théorie des différenciations où l'on ne suppose qu'une variable indépendante, que

$$\frac{du}{da(x)} = \frac{du}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{da(x)}$$

on aura l'équation

$$\frac{du}{dx(y)} = \frac{du}{dx(a)} + \frac{du}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)}$$

Puisque  $\frac{dy}{dx(a)}$  ne peut être nul, et que la nouvelle fonction qu'on suppose se trouve dans la valeur de  $\frac{du}{dy(x)}$ , n'entre ni dans  $\frac{du}{dx(a)}$

ni dans  $\frac{dy}{dx(a)}$ , il faudra nécessairement, en vertu de cette équation, qu'elle soit contenue dans la valeur de  $\frac{du}{dx(y)}$ .

On trouvera de la même manière une équation toute semblable à l'égard de  $v$ , d'où l'on conclura que

$$\frac{dv}{dy(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx(a)}} \left[ \frac{dv}{dx(a)} + \frac{dv}{dx(y)} \right]$$

et puisque  $\frac{dy}{dx(a)}$  ne peut être ni nulle ni infinie, la nouvelle fonction de  $a$  qui entre dans la valeur de  $\frac{dv}{dx(a)}$ , et non dans celle de  $\frac{dv}{dx(y)}$  et de  $\frac{dy}{dx(a)}$ , entrera nécessairement dans la valeur de  $\frac{dv}{dy(x)}$ .

Puisqu'une nouvelle fonction de  $a$  non contenue dans les valeurs des dérivées de  $z$  d'ordres inférieurs à  $\frac{du}{dy(x)} = \frac{dv}{dx(y)}$ , ne peut entrer dans cette dernière, sans se trouver aussi dans la valeur de la dérivée de  $z$  du même ordre qui la précède immédiatement  $\frac{du}{dx(y)}$ , on démontrera de même successivement qu'elle se trouve encore dans toutes celles de l'ordre  $n$  qui précèdent celle-ci jusqu'à  $\frac{d^n z}{dx^n(y)}$ ; et puisqu'elle se trouve aussi nécessairement dans la dérivée suivante  $\frac{dv}{dy(x)}$ , elle se trouvera également dans toutes celles du même ordre  $n$  qui suivent cette dernière jusqu'à  $\frac{d^n z}{dy^n(x)}$ .

Il suit de là que toutes les fois qu'une intégrale primitive contient une fonction arbitraire d'une quantité qui ne dépend ni de  $x$  seul ni de  $y$  seul, une nouvelle fonction dérivée de celle-là ne peut commencer à paraître dans la valeur d'une des dérivées de  $z$ , sans s'être montrée dans les dérivées des ordres précédens, à moins qu'elle n'entre aussi dans les valeurs de toutes les autres dérivées de  $z$  du même ordre. D'où résulte la nécessité de la proposition réciproque, que si la valeur d'une

dérivée de  $z$  d'un certain ordre ne contient que les mêmes fonctions de  $a$  qui se trouvent dans les dérivées des ordres inférieurs, toutes les dérivées de  $z$  de cet ordre ne contiendront aussi que les mêmes fonctions de  $a$ .

Voyons dans quelle circonstance le passage des dérivées de l'ordre  $n-1$  à celles de l'ordre  $n$  peut avoir lieu sans que les valeurs des dérivées de  $z$  de l'ordre  $n$  contiennent une nouvelle fonction de  $a$  qui ne se trouve pas dans celles des dérivées de l'ordre  $n-1$ .

En supposant toujours que  $a$  ne dépend ni de  $x$  seul ni de  $y$  seul;

$\frac{dy}{da(x)}$  ne peut être ni nul ni infini, puisque  $\frac{dy}{da(x)} = 0$  donnerait

$y = \text{const.}$ , ce qui est absurde, et que  $\frac{dy}{da(x)} = \infty$ , ou  $\frac{da}{dy(x)} = 0$ ,

donnerait  $a = \text{const.}$ , ce qui est contre la supposition. Or, on tire de

l'équation  $\frac{du}{da(x)} = \frac{du}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{da(x)}$  cette valeur  $\frac{du}{dy(x)} = \frac{\frac{du}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}$ ; et

il est évident que les valeurs de  $\frac{du}{da(x)}$  et de  $\frac{dy}{da(x)}$ , déduites de l'intégrale, contiennent chacune une fonction de  $a$  qui ne se trouve pas dans les valeurs de  $u$  et de  $y$ , tirées de la même intégrale; d'où il suit que  $\frac{du}{dy(x)}$  en contient nécessairement une qui ne se trouve pas dans

$u$ , à moins que la nouvelle fonction de  $a$  que présentent  $\frac{du}{da(x)}$  et  $\frac{dy}{da(x)}$ , étant la même dans ces deux quantités, n'y entre que dans

un facteur commun qui disparaisse de la fraction  $\frac{\frac{du}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}$  par la suppression de ce facteur dans son numérateur et dans son dénominateur.

En rapprochant ce résultat de ce que nous avons déjà démontré sur la nécessité que la nouvelle fonction de  $a$ , quand  $a$  varie à-la-fois avec  $x$  et avec  $y$ , se présente en même temps dans toutes les dérivées

de  $z$  de l'ordre  $n$ , ou ne se présente dans aucune, on voit qu'il faut nécessairement, pour que les valeurs de ces dérivées ne contiennent que les mêmes fonctions de  $\alpha$  qui ont déjà paru dans les précédentes, que les valeurs de toutes les dérivées de  $z$  de l'ordre immédiatement inférieur  $n-1$ , soient telles que les coefficients de  $d\alpha$ , dans leurs différentielles prises en regardant  $x$  et  $\alpha$  comme les deux variables indépendantes, aient un facteur commun avec  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ , où se trouve exclusivement la nouvelle fonction de  $\alpha$ , que cette différenciation relative à  $\alpha$  introduit nécessairement dans les valeurs de ces coefficients. Il est aisé, au reste, de démontrer que, si un des coefficients de  $d\alpha$  a un facteur de ce genre commun avec  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ , ce facteur le sera aussi à tous les autres; car il suffit de prouver pour cela que  $u$  et  $v$  étant toujours deux dérivées consécutives de  $z$  de l'ordre  $n-1$ , tout facteur commun à  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$ , qui contient une fonction de  $\alpha$  qui ne se trouve ni dans  $v$  ni dans  $y$ , divise aussi la valeur de  $\frac{du}{d\alpha(x)}$ , et que réciproquement, si ce facteur est commun à  $\frac{du}{d\alpha(x)}$  et à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ , il le sera aussi à  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$ .

En effet, la fonction de  $\alpha$  qui entre dans ce facteur ne se trouvant ni dans  $v$  ni dans  $y$ , ne pourra entrer non plus dans les valeurs de  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$  et de  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ ; ces dernières quantités ne pourront donc contenir ce facteur, ni comme multiplicateur, ni comme dénominateur. Or, comme il résulte des valeurs trouvées précédemment pour

$$\frac{du}{dx(y)} \text{ et } \frac{du}{dy(x)}, \text{ que } \frac{du}{dy(x)} = \frac{\frac{du}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}} \text{ et que}$$

$$\frac{dv}{dx(y)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dx(\alpha)}{dy(x)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{\frac{dv}{d\alpha(x)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}$$

on a, à cause de  $\frac{du}{dy(x)} = \frac{dv}{dx(y)}$ , les équations

$$\frac{du}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{d\alpha(x)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)}$$

et

$$\frac{dv}{d\alpha(x)} = \frac{dx(\alpha)}{dy} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx(\alpha)}} \cdot \frac{du}{d\alpha(x)}$$

qui montrent évidemment : la première, que si le facteur dont nous parlons est commun à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$  et à  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$ , il l'est aussi à  $\frac{du}{d\alpha(x)}$  ; et la seconde, que s'il est commun à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$  et à  $\frac{du}{d\alpha(x)}$ , il divisera aussi  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$ .

Je ferai dans ce mémoire un usage fréquent de la formule

$$\frac{du}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{d\alpha(x)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)}$$

qui a toujours lieu entre deux dérivées consécutives de  $z$  d'un même ordre, représentées ici par  $u$  et  $v$ , en y substituant à la place de ces deux lettres, soit  $p$  et  $q$ , soit  $r$  et  $s$ , soit  $s$  et  $t$ , &c.

Lorsque  $\frac{du}{d\alpha(x)}$  contient ainsi un facteur qui divise aussi  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ , et où se trouve une fonction de  $\alpha$  qui n'est contenue ni dans la valeur de  $u$ , ni dans celle de  $y$ , ni dans celles des dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre de  $u$ , non-seulement tous les coefficients de  $d\alpha$  dans les différentielles des dérivées de  $z$ , du même ordre que  $u$ , prises en considérant  $x$  et  $\alpha$  comme les deux variables indépendantes, sont divisibles (\*) exactement par ce facteur ; mais les coefficients de  $d\alpha$  dans

---

(\*) J'entends par-là que le quotient où peuvent d'ailleurs se trouver d'autres fractions, n'en contient point où le diviseur se trouve en dénominateur, et en général ne contient d'aucune manière la nouvelle fonction de  $\alpha$  qui se trouve dans ce diviseur.

les différentielles prises de la même manière des dérivées de  $z$  d'ordres inférieurs à celui de  $u$ , et de  $z$  lui-même, sont aussi nécessairement divisibles par ce facteur.

Il suffit de faire voir, pour cela, que si cette circonstance a lieu, comme nous venons de le démontrer, pour toutes les dérivées de l'ordre  $n-1$  qui est celui de  $u$ , quand elle a lieu pour  $u$ , elle aura aussi nécessairement lieu pour toutes les dérivées de  $z$  de l'ordre précédent  $n-2$ ; car  $n$  étant indéterminé, le même raisonnement appliqué aux dérivées de  $z$  de l'ordre  $n-2$  servira à démontrer la même chose de celles de l'ordre  $n-3$ , et ainsi de suite jusqu'à  $z$ .

Soit donc  $w$  une dérivée de  $z$  de l'ordre  $n-2$ ;  $\frac{dw}{dy(x)}$  en sera une de l'ordre  $n-1$ , et ne contiendra point, d'après la supposition, la nouvelle fonction de  $\alpha$  qui entre dans le facteur supposé commun à

$\frac{d\left(\frac{dw}{dy(x)}\right)}{d\alpha(x)}$  et à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ ; mais on aura

$$\frac{dw}{d\alpha(x)} = \frac{dw}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)}$$

valeur dans laquelle  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$  est divisible par ce facteur; et  $\frac{dw}{dy(x)}$  en est indépendant, puisqu'il ne contient pas la nouvelle fonction de  $\alpha$  qui y entre: le produit de ces deux quantités, qui est la valeur de  $\frac{dw}{d\alpha(x)}$ , sera donc aussi divisible par le même facteur, et donnera un quotient qui ne pourra contenir la nouvelle fonction de  $\alpha$  qui caractérise ce facteur.

Une fois qu'il s'est manifesté dans les dérivées de  $z$  de l'ordre  $n$ , une fonction de  $\alpha$  qui ne se trouve dans aucune des équations composant l'intégrale primitive, et qui dérive par la différenciation d'une de celles que ces équations contiennent, il en vient infailliblement une nouvelle dans les dérivées de l'ordre suivant  $n+1$ ; une nouvelle dans celles de l'ordre  $n+2$ , et ainsi de suite à l'infini; la dernière de ces nouvelles

fonctions ne pouvant se trouver que dans les dérivées du dernier ordre de  $z$ , et entrant nécessairement dans toutes celles de cet ordre, d'après ce qui a été démontré précédemment.

En effet, dès qu'on suppose dans  $u$  une fonction de  $\alpha$  qui n'est contenue dans aucune des équations composant l'intégrale, ni par conséquent dans la valeur de  $y$  tirée de cette intégrale, la dérivée de  $z$  de l'ordre suivant, prise par rapport à  $y$  et représentée par

$$\frac{d^2 u}{d y^2 (x)} = \frac{\frac{d u}{d \alpha (x)}}{\frac{d y}{d \alpha (x)}}$$

contiendra dans son numérateur une nouvelle fonction de  $\alpha$  qui sera dérivée par la différenciation de celle qui est dans  $u$ , et qui ne pourra se trouver dans le dénominateur, parce que, pour qu'elle fût contenue dans  $\frac{d y}{d \alpha (x)}$ , il faudrait que celle dont elle dérive par une différenciation, se trouvât dans  $y$ , ce qui est contre la supposition.

Cette nouvelle fonction restera donc nécessairement dans la valeur de  $\frac{d u}{d y (x)}$ , et en produira par conséquent une autre nouvelle dans

$$\frac{d^2 u}{d y^2 (x)} = \frac{d \left( \frac{d u}{d y (x)} \right)}{\frac{d y}{d \alpha (x)}}$$

qui ne pourra s'évanouir par la même raison, puisque celle dont elle dérive ne se trouve pas dans la valeur de  $y$ .

J'appellerai dérivées homogènes à l'intégrale relativement à  $\alpha$ , celles qui ne renferment que des fonctions de  $\alpha$  qui se trouvent aussi dans l'intégrale; et dérivées hétérogènes à l'intégrale relativement à  $\alpha$ , les dérivées de  $z$  qui contiennent des fonctions de  $\alpha$  qui n'entrent dans aucune des équations de l'intégrale. Observez que, pour que des dérivées soient ce que j'appelle homogènes à l'intégrale, il n'est pas né-

cessaire qu'elles contiennent toutes les fonctions de  $\alpha$  qui sont dans l'intégrale, mais seulement qu'elles n'en contiennent point qui ne s'y trouvent pas.

Il est aisé de voir, d'après cette définition et les diverses propositions qui viennent d'être démontrées,

1.° Que si  $\frac{dz}{dx(y)}$ , et par conséquent aussi  $\frac{dz}{dy(x)}$ , ne sont pas homogènes à l'intégrale, aucune des dérivées de  $z$  ne peut l'être;

2.° Que si une dérivée  $u$  de  $z$  de l'ordre  $n$ , tirée d'une intégrale primitive, est homogène à l'intégrale, toutes les dérivées de  $z$  du même ordre et toutes celles des ordres précédens le seront aussi;

3.° Que quand on est arrivé aux différenciations qui introduisent dans les valeurs des dérivées de  $z$  des fonctions de  $\alpha$  étrangères aux équations dont se compose l'intégrale, chacune de ces fonctions se présente à-la-fois dans toutes les dérivées de  $z$  de l'ordre où elle commence à paraître;

4.° Qu'alors il y a une nouvelle fonction produite à chaque passage d'un ordre à l'ordre suivant; en sorte que les dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale peuvent bien être homogènes entre elles dans un même ordre, mais qu'elles sont nécessairement hétérogènes aux dérivées de l'ordre immédiatement inférieur, puisqu'elles contiennent une fonction de  $\alpha$  qui ne peut se trouver dans celles-ci, et à plus forte raison hétérogènes aux dérivées de  $z$  des autres ordres précédens.

Je crois devoir remarquer en passant que les premières dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale présentent dans leur dénominateur  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$  la nouvelle fonction d'où résulte cette hétérogénéité, et qui est précisément celle contenue dans le facteur commun, dont la suppression en haut et en bas la faisait disparaître des valeurs des dérivées homogènes à l'intégrale; mais une fois que cette nouvelle fonction s'est introduite dans les valeurs des dérivées de  $z$ , c'est dans les numérateurs de

ces valeurs que se présentent les nouvelles fonctions de  $\alpha$  qui rendent les dérivées de chaque ordre hétérogènes aux dérivées de tous les ordres précédens.

Une équation aux différentielles partielles étant donnée, on doit d'abord chercher si elle est susceptible d'avoir une intégrale primitive de la première classe, et commencer par examiner si, dans le cas où elle le serait en effet, les dérivées contenues dans cette équation sont homogènes ou hétérogènes à l'intégrale. C'est à l'égard des dérivées de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre même de l'équation donnée, qu'il convient de faire cette recherche, puisqu'il suit de ce qui vient d'être démontré, que si l'on prouve qu'elles sont nécessairement homogènes à l'intégrale, relativement à quelques-unes des fonctions qui entrent dans cette intégrale, on sera certain que toutes les autres dérivées contenues dans l'équation donnée sont aussi homogènes à l'intégrale relativement aux mêmes fonctions arbitraires. Nous verrons bientôt que l'on peut toujours déterminer par un simple calcul d'élimination exécutée sur une équation aux différentielles partielles donnée, quel doit être, si elle est susceptible d'avoir une intégrale primitive de la première classe, le nombre des fonctions arbitraires contenues dans cette intégrale relativement auxquelles toutes les dérivées contenues dans l'équation donnée sont homogènes à l'intégrale. La distinction de ces deux genres de fonctions arbitraires, et le procédé que nous ferons connaître pour les déterminer séparément par des calculs exécutés sur l'équation donnée, nous sera d'un grand secours dans la recherche des intégrales.

Nous n'avons considéré, dans tout ce que nous venons de dire, que les fonctions composées de quantités qui variaient à-la-fois avec  $x$  et avec  $y$ , et nous avons vu que, relativement à ces fonctions, les dérivées d'un même ordre étaient nécessairement ou toutes homogènes ou toutes hétérogènes à l'intégrale : il n'en est pas de même quand l'intégrale primitive contient une ou plusieurs fonctions arbitraires formées

de qualités qui dépendent de  $x$  seul ou de  $y$  seul. Relativement à ces fonctions, tout ce que nous venons de démontrer sur la nécessité que les nouvelles fonctions arbitraires commencent à paraître à-la-fois dans toutes les dérivées d'un même ordre, cesse évidemment d'avoir lieu; mais pour qu'il ne reste aucun nuage sur les démonstrations précédentes; il est bon de voir comment cela résulte des formules mêmes sur lesquelles ces démonstrations sont fondées. Supposons donc d'abord que l'intégrale primitive contienne une fonction arbitraire formée d'une quantité qui ne dépende que de  $y$ , et représentons-la par  $\Phi(fy)$  (\*); on pourra faire dans ces formules  $a = fy$ , ce qui donne

$$y = Fa, \quad \frac{dy}{dx(a)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{da(x)} = F'a.$$

L'équation

$$\frac{du}{dx(y)} = \frac{du}{dx(a)} - \frac{du}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)}$$

se réduit donc à

$$\frac{du}{dx(y)} = \frac{du}{dx(a)}$$

qui montre que  $\frac{du}{dx(y)}$  ne peut contenir la nouvelle fonction arbitraire

qui, comme nous l'avons vu, ne peut entrer dans  $\frac{du}{dx(a)}$ ; et l'équation

$$\frac{du}{dx(y)} = \frac{\frac{du}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}$$

qui devient

$$\frac{du}{dy(x)} = \frac{du}{da(x)} \cdot \frac{1}{F'a}$$

---

(\*)  $fy$  représentant une fonction déterminée de  $y$ , et  $\phi$  étant le signe d'une fonction arbitraire, il est clair que  $\phi(fy)$  est la même chose que  $\psi y$ ; j'ai employé  $\phi(fy)$ , parce que le raisonnement est absolument le même qu'en se servant de  $\psi y$ , et que d'ailleurs si l'équation primitive renfermait  $\phi'(fy)$ ,  $\phi''(fy)$ , &c.; la substitution de  $\psi y$  à  $\phi(fy)$  exigerait des transformations qui pourraient la rendre plus compliquée.

montre que cette nouvelle fonction contenue dans  $\frac{du}{d\alpha(x)}$  reste nécessairement dans  $\frac{du}{dy(x)}$ , puisqu'elle ne peut entrer dans le dénominateur  $F\alpha$ , qui est une fonction déterminée de  $\alpha$ , ni par conséquent s'évanouir par la suppression d'un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

On voit donc par ces formules, comme il est d'ailleurs aisé de s'en assurer sans y avoir recours, que dans le cas que nous examinons ici,  $\frac{du}{dx(y)}$  ne contient que les mêmes fonctions arbitraires de  $y$  qui se trouvent dans  $u$ , et que  $\frac{du}{dy(x)}$  en contient nécessairement une nouvelle.

En supposant que  $u$  représente successivement  $z, p, q, r, s, \&c.$ , on en conclura que  $p, r$  et toutes les dérivées de  $z$  relatives à  $x$  seul, ne contiennent que les mêmes fonctions arbitraires de  $y$  qui se trouvent dans  $z$ ; que  $q$  en contient une nouvelle, la seule qui puisse entrer dans  $s$  et dans toutes les dérivées de  $z$  où il n'y a qu'une différenciation relative à  $y$ ; en sorte que les dérivées résultant des différenciations relatives à  $x$  seul, sont toutes homogènes à l'intégrale relativement aux fonctions arbitraires de  $y$  seul; qu'aucune autre dérivée de  $z$  ne peut l'être; mais que celles où il y a un même nombre de différenciations relatives à  $y$ , sont homogènes entre elles à l'égard de ces fonctions.

Si l'on suppose que l'on ait pris  $x$  au lieu de  $y$ , et  $y$  au lieu de  $x$ , dans le cas où il y a dans l'intégrale primitive une ou plusieurs fonctions de  $x$  seul, on verra sur-le-champ que ce que nous venons de dire des dérivées de  $z$  relatives à une de ces deux variables, aura lieu pour celles qui se rapportent à l'autre, et réciproquement.

Les fonctions arbitraires de  $x$  seul et de  $y$  seul forment ainsi une troisième sorte de fonctions arbitraires; mais nous verrons qu'on les détermine de la même manière que les autres fonctions relativement auxquelles il y a dans l'équation donnée des dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale.

## S. III.

*CONSIDÉRATIONS sur le nombre des Fonctions arbitraires qui doivent entrer dans les Intégrales primitives pour qu'elles puissent être générales.*

LA détermination du nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles que doivent renfermer les intégrales des équations aux différences partielles, repose, ainsi que nous l'avons déjà dit, sur ce principe, que quand on a  $h$  équations qui ne rentrent point les unes dans les autres, et qu'on sait qu'elles n'en doivent pas donner plus de  $h'$  par l'élimination des arbitraires, le nombre de ces arbitraires peut bien être plus grand que  $h-h'$ , parce que plusieurs arbitraires peuvent s'en aller en même temps; mais qu'il ne saurait être moindre, puisque l'élimination de ces arbitraires laisserait alors plus de  $h'$  équations. Supposons d'abord que l'intégrale de l'équation donnée appartienne à la première classe. En représentant toujours par  $h$  le nombre des équations déduites de l'intégrale primitive par des différenciations successives jusqu'à l'ordre  $n$ , et par  $h'$  le nombre des équations entre  $x, y, z$ , et les mêmes dérivées de  $z$ , qu'on tire de l'équation donnée; en la différenciant  $n-m$  fois, il est clair que les  $h$  équations résultant de la première opération ne peuvent rentrer les unes dans les autres, à l'égard des équations dérivées d'une même équation de l'intégrale primitive, parce que chacune de ces équations contient une dérivée de  $z$  qui ne se trouve dans aucune des autres, et à l'égard de celles qui sont dérivées de différentes équations de l'intégrale, parce qu'elles ne pourraient rentrer les unes dans les autres, sans que la même chose n'arrivât aux équations dont elles dérivent.

Pour que l'intégrale primitive n'établisse entre  $x, y, z$  et les dérivées de  $z$  jusqu'à celles de l'ordre quelconque  $n$ , que les relations qu'expriment l'équation donnée et ses dérivées, il faudra donc que le nombre des arbitraires contenues dans les dérivées de l'intégrale primitive ne puisse jamais être plus petit que  $h-h'$ .

Or, en supposant que  $k$  désigne toujours le nombre des quantités réellement différentes entre elles, dont les fonctions arbitraires sont composées, il est évident qu'après avoir différencié l'intégrale jusqu'aux dérivées de l'ordre  $n$ , relativement à  $x$  et à  $y$ , on aura

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} (k+1) \text{ équations,}$$

qui contiendront deux sortes de quantités arbitraires à éliminer; savoir:

1.° Les quantités

$$\begin{array}{ccccccc} a, & & \beta, & & \&c., & \\ \frac{da}{dx}, & \frac{dy}{dy}, & \frac{d\beta}{dx}, & \frac{d\beta}{dy}, & & \&c., & \\ \frac{d^2 a}{dx^2}, & \frac{d^2 a}{dx dy}, & \frac{d^2 a}{dy^2}, & \frac{d^2 \beta}{dx^2}, & \frac{d^2 \beta}{dx dy}, & \frac{d^2 \beta}{dy^2}, & \&c., \\ & & \&c. & & \&c., & \end{array}$$

dont le nombre est  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} k$ ;

2.° Les fonctions arbitraires et leurs dérivées : pour en exprimer le nombre de la manière la plus générale, je représenterai par  $g$  le nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles, et par  $g'$  celui des fonctions qui en sont dérivées par voie de différenciation ou d'intégration, qui entrent dans l'intégrale, ou qui sont produites par les premières différenciations dans l'intervalle que pourraient laisser entre elles les dérivées de fonctions arbitraires qui s'y trouvent, telles que seraient, par exemple,  $\Phi' a$ , si l'intégrale contenait  $\Phi a$  et  $\Phi'' a$ , ou  $\iint f(a, \Phi a) da$ , si elle contenait  $\iiint f(a, \Phi a) da^2$  et  $\Phi a$ . Je supposerai enfin, dans le cas où les premières différenciations n'introduisent aucunes nouvelles fonctions arbitraires dérivées, soit de  $\Phi a$ , soit de  $\Psi \beta$ , &c. qu'on désigne par  $l+1$  l'ordre des dérivées qui commencent à être hétérogènes à l'intégrale relativement aux fonctions de  $a$ , par  $l'+1$  l'ordre de celles qui commencent à l'être relativement à celles de  $\beta$ , et ainsi de suite; en

en sorte que  $l=0$ , quand  $p$  et  $q$  sont hétérogènes à l'intégrale relativement à  $\Phi a$ ;  $l'=0$ , quand  $p$  et  $q$  le sont relativement à  $\Psi \beta$ , &c. Cela posé, nous avons vu que dès que les différenciations ont introduit dans le calcul une nouvelle arbitraire dérivée de  $\Phi a$ , par exemple, il s'en produit nécessairement une nouvelle, dérivée aussi de  $\Phi a$ , chaque fois qu'on passe d'un ordre de différenciations à l'ordre suivant. Il est d'ailleurs évident qu'à l'exception de celles que nous avons comprises dans  $g'$ , chaque fonction arbitraire indépendante n'en peut produire qu'une pour chaque ordre de différenciations; le nombre de celles qui s'introduiront de cette manière dans le calcul sera donc  $n-l$  pour  $\Phi a$ ,  $n-l'$  pour  $\Psi \beta$ , et ainsi de suite: la somme de ces différens nombres est  $gn-l-l'-\&c.$  Il faut y ajouter  $g+g'$  et le nombre  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} k$  qui est celui des quantités à éliminer autres que les fonctions arbitraires; on aura ainsi

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} k + g(n+1) + g' - l - l' - \&c., \text{ quantités}$$

à éliminer entre

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} (k+1), \text{ équations.}$$

Il restera donc après cette élimination au moins

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - g(n+1) - g' + l + l' + \&c. \text{ équations;}$$

et ce nombre ne devra jamais surpasser, quelque grand que soit  $n$ , le nombre

$$h = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m^2-m}{2}$$

des équations qu'établit entre  $x, y, z$ , et les dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre  $n$ , une équation donnée de l'ordre  $m$ ; il faut pour cela que

$$g(n+1) + g' - l - l' - \&c.$$

ne soit pas plus petit que

$$\frac{m(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$$

quel que soit  $n$ , c'est-à-dire que l'intégrale primitive ne peut être générale qu'autant que  $g$  n'est pas plus petit que

$$m - \frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c. ;$$

ce qui donne  $g = m$ ; car si  $g$  était seulement égal à  $m - 1$ , il suffirait de prendre

$$n > \frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c.$$

pour que cette condition ne fût plus satisfaite.

Les intégrales primitives générales de la première classe appartenant à des équations aux différentielles partielles de l'ordre  $m$ , exigent donc nécessairement  $m$  fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres.

En faisant  $g = m$ , on aura pour le nombre des quantités à éliminer

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} k + m(n+1) + g' - l - l' - \&c.$$

entre  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} (k+1)$  équations ;

mais l'équation donnée, et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ , doivent résulter nécessairement du système qu'on suppose être l'intégrale primitive de cette équation : d'où il suit qu'après l'élimination il doit rester

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m(m-1)}{2} \text{ équations ;}$$

ce qui suppose qu'un nombre d'arbitraires égal à

$$\frac{m(m-1)}{2} + g' - l - l' - \&c.$$

disparaissent d'elles-mêmes dans les opérations qu'on exécute pour éliminer les autres. Or ce nombre est toujours nul relativement aux intégrales des équations du premier ordre, parce qu'alors  $\frac{m(m-1)}{2} = 0$ ; que dans le cas où l'équation donnée est linéaire, on a  $g = 0$ , et que dans celui où elle ne l'est pas et où  $\Phi a$  entre avec  $\Phi a$  dans l'intégrale, ce

qui donne  $g' = 1$ , on a toujours  $l = 1$ , c'est-à-dire que la première différenciation n'introduit dans le calcul aucune nouvelle fonction arbitraire, comme nous le ferons voir lorsque nous examinerons en particulier les intégrales des équations du premier ordre.

En rendant compte, comme nous venons de le faire, de la nécessité d'admettre dans l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles autant de fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres qu'il y a d'unités dans l'ordre de cette équation, on voit pourquoi cette condition n'est plus indispensable quand l'intégrale est représentée par une série contenant une infinité de fonctions arbitraires dérivées les unes des autres, qui peuvent suffire à l'élimination, sans qu'il en résulte entre  $x, y, z$  et les dérivées de  $z$ , plus d'équations qu'il ne faut; on voit aussi pourquoi il peut en être de même quand les fonctions arbitraires se trouvent sous un signe d'intégration partielle. En effet, quand on différencie une intégrale partielle par rapport à  $x$  et à  $y$ , il en résulte de nouvelles intégrales partielles qui sont en général toutes indépendantes les unes des autres; en sorte que quand elles ne disparaissent pas à-la-fois par quelques circonstances particulières, comme il arrive lorsque les intégrales partielles de l'équation primitive sont indéfinies, elles ne peuvent être éliminées qu'en vertu des relations qui existent entre les valeurs qu'elles prennent à leurs limites.

Le nombre des fonctions arbitraires peut donc alors être moindre que celui qui exprime l'ordre de l'équation donnée, sans que l'intégrale cesse d'être générale; c'est ainsi que

$$z = \int e^{-u^2} du \Phi(x + 2u\sqrt{y}), [u = -\infty; u = \infty],$$

satisfait à l'équation  $r = q$  et à toutes ses dérivées, sans établir entre les dérivées de  $z$  aucune autre relation, quelque loin qu'on pousse les différenciations. Quoiqu'elle ne contienne qu'une fonction arbitraire, le nombre des arbitraires qu'il faut éliminer séparément augmente de deux unités, chaque fois qu'on passe d'un ordre de différenciation à l'ordre suivant, précisément comme s'il y avait deux fonctions arbi-

traires. Ce nombre augmenterait même davantage, et serait trop grand pour qu'on pût éliminer les arbitraires, si l'intégration par partie ne le réduisait de manière à rendre l'élimination possible; à cause que les termes dégagés du signe  $\int$  par cette opération sont nuls aux deux limites de l'intégrale définie.

On a, en effet,

$$p = \int e^{-u^2} du \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-u^2} u du \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$r = \int e^{-u^2} du \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-u^2} u du \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$t = -\frac{1}{2y^{3/2}} \int e^{-u^2} u du \Phi'(x + 2u\sqrt{y}) + \frac{1}{y} \int e^{-u^2} u^2 du \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

&c.

&c.

où chaque dérivée de  $\zeta$  semble au premier coup-d'œil contenir une arbitraire indépendante des autres, ce qui rendrait toute élimination impossible: mais, au moyen des intégrations par partie, et en négligeant les termes qu'elles produisent hors du signe  $\int$  comme nuls aux limites, on a

$$p = \int e^{-u^2} du \Phi'(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$q = \int e^{-u^2} du \Phi''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$r = \int e^{-u^2} du \Phi'''(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$s = \int e^{-u^2} du \Phi^{(4)}(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$t = \int e^{-u^2} du \Phi^{(5)}(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$\frac{d^3 \zeta}{dx^3} = \int e^{-u^2} du \Phi^{(6)}(x + 2u\sqrt{y}),$$

$$\frac{d \zeta}{dx^2 dy} = \int e^{-u^2} du \Phi^{(7)}(x + 2u\sqrt{y}),$$

et ainsi de suite; ce qui donne  $r = q$  et toutes les équations qui en dérivent,

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = s, \quad \frac{d^3 z}{dx^2 dy} = t, \quad \&c.,$$

sans pouvoir donner aucune autre relation, puisqu'il est aisé de voir par la forme des valeurs de  $p, q, r, s, \&c.$  qu'après qu'on a fait subir  $n$  différenciations à l'intégrale, on a, dans les  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  équations qui en résultent, un nombre  $2n+1$  de quantités à éliminer: cela suffit pour qu'il ne reste que

$$\frac{n^2 + 3n + 2}{2} - 2n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ équations;}$$

ce qui est précisément le nombre  $\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}$  des équations déduites de la proposée par des différenciations poussées jusqu'à l'ordre  $n$ , quand on fait  $m=2$ , pour exprimer que cette équation est du second ordre. Nous verrons, dans la suite de ces recherches, qu'un grand nombre d'équations de cet ordre ont ainsi des intégrales générales où il n'y a qu'une fonction arbitraire sous un signe d'intégration partielle, et qui fournissent dans les équations dérivées de ces intégrales, quelque loin qu'on pousse la différenciation, précisément autant d'arbitraires à éliminer qu'il en faut pour que ces intégrales soient générales; c'est-à-dire,  $2n+1$  arbitraires, lorsqu'il s'agit des équations du second ordre.

Mais ces intégrales ne sont susceptibles de cette généralité qu'à cause que la fonction arbitraire est sous un signe d'intégration partielle. Ainsi, quoique l'intégrale primitive de l'équation du second ordre,

$$r^2 - 2 \left( p - \frac{z}{1+x} \right) q r + \left( p - \frac{z}{1+x} \right) y = 0 \quad (*),$$

exprimée en intégrale définie, puisse être générale avec une seule fonction arbitraire, l'équation

(\*) Voy. le Mémoire sur les *Solutions particulières* par M. Poisson, inséré dans le 13.<sup>e</sup> Cahier de ce Journal, page 113.

$$z = (1 + x) \Phi(y)$$

qui y satisfait avec une fonction arbitraire, n'en est cependant qu'une solution particulière, parce qu'outre la relation entre  $x, y, p, q, r$ , exprimée par l'équation du second ordre, elle donne une infinité d'autres relations entre les dérivées de  $z$ , telle que celle-ci  $z = (1 + x)p$ , et toutes celles qu'on en peut tirer par la différenciation. A l'égard des intégrales exprimées par des séries, il est évident qu'on ne peut déterminer *a priori*, par des considérations analogues aux précédentes, le nombre des fonctions arbitraires indépendantes entre elles qu'elles doivent contenir pour être générales, puisqu'on a alors une infinité d'arbitraires à éliminer, et que ces considérations reposent entièrement sur ce que le nombre de ces arbitraires ne saurait être moindre qu'une certaine limite qui croît avec le nombre des différenciations.

#### §. IV.

*CONDITIONS auxquelles doivent satisfaire les Quantités dont se composent les Fonctions arbitraires qui ne sont point comprises dans les Intégrales sous des signes d'Intégrations partielles.*

CETTE partie de nos recherches est fondée sur les formules par lesquelles on exprime les dérivées de  $z$  d'un ordre quelconque  $n$ , en fonction des coefficients de  $dx$  et de  $da$  dans les différentielles des dérivées de  $z$  de l'ordre  $n - 1$ . Ces formules, qu'il m'a semblé indispensable de rappeler et de démontrer ici, sont indépendantes de la supposition que  $a$  est une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive. On peut y regarder  $a$  comme une quantité quelconque, fonction explicite ou implicite, ainsi que  $z$ , de  $x$  et de  $y$ . Nous verrons bientôt, lorsqu'on veut prendre pour  $a$  dans ces formules une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires, comment on doit exprimer cette condition dans le calcul.

$a$  étant une fonction quelconque des deux variables indépendantes

$x$  et  $y$ , on peut prendre  $x$  et  $a$  pour indépendantes; et alors  $y$  et toutes les autres quantités qui entrent dans le calcul, deviennent, comme nous l'avons déjà remarqué, des fonctions de  $x$  et de  $a$ . Représentons, pour abrégé, les dérivées de  $z$  relatives à  $x$  et à  $y$ :

- Dans le premier ordre, par .....  $p, q,$
- Dans le second, par .....  $r, s, t,$
- Dans l'ordre quelconque  $n-1$ , par .....  $\zeta, \eta, \theta, \dots, \kappa, \lambda, \mu, \nu,$
- Et dans l'ordre suivant  $n$ , par .....  $\xi, \pi, \rho, \sigma, \dots, \tau, \upsilon, \omega.$

Nous aurons d'abord cette suite d'équations :

$$\omega = \frac{\frac{d\nu}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}, \quad \upsilon = \frac{\frac{d\mu}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}, \quad \tau = \frac{\frac{d\lambda}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}, \quad \dots$$

$$\dots \rho = \frac{\frac{d\eta}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}, \quad \pi = \frac{\frac{d\zeta}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}};$$

quant à  $\xi$ , il sera égal à

$$\frac{d\xi}{dx(a)} = \pi \frac{dy}{dx(a)}.$$

Si l'on établit maintenant l'équation

$$\frac{du}{da(x)} = \frac{dv}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{da(x)} = \frac{dv}{da(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)},$$

entre toutes les dérivées consécutives de l'ordre  $n-1$ , considérées deux à deux, on aura

$$\frac{d\mu}{da(x)} = \frac{dv}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{da(x)} = \frac{dv}{da(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)},$$

$$\frac{d\lambda}{da(x)} = \frac{d\mu}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{da(x)} = \frac{d\mu}{da(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)},$$

$$\frac{dx}{d\alpha(x)} = \frac{d\lambda}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{d\lambda}{d\alpha(x)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)}$$

$$\frac{d\zeta}{d\alpha(x)} = \frac{dn}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{dn}{d\alpha(x)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)}$$

d'où l'on tire cette suite d'équations dont la loi est évidente,

$$\frac{d\mu}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)} = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x)}$$

$$\frac{d\lambda}{d\alpha(x)} = \left( \frac{d\mu}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \right) \frac{dy}{d\alpha(x)} + \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 \frac{dv}{d\alpha(x)}$$

$$\frac{d\lambda}{d\alpha(x)} = \left[ \frac{d\lambda}{dx(\alpha)} \cdot \frac{d\mu}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} + \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 \right] \frac{dy}{d\alpha(x)} + \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^3 \frac{dv}{d\alpha(x)}$$

$$\frac{d\zeta}{d\alpha(x)} = \left[ \frac{dn}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} + \frac{d\theta}{dx(\alpha)} \cdot \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 \right] \frac{dy}{d\alpha(x)} + \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^3 \frac{dv}{d\alpha(x)}$$

et si l'on substitue ces valeurs dans celles de  $\nu, \tau, \sigma, \dots, \rho, \pi, \xi$ , la division par leur dénominateur commun  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$  se fera exactement sur tous les termes de chaque valeur, excepté sur le dernier; en sorte qu'il ne restera de dérivées relatives à  $\alpha$  que dans ce dernier terme: on aura ainsi

$$\omega = \frac{\frac{dv}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}$$

$$\nu = \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \cdot \frac{d\alpha(x)}{dy}$$

$$\tau = \frac{d\mu}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dv}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} + \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 \cdot \frac{d\alpha(x)}{dy}$$

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{d\eta}{dx(a)} - \frac{d\theta}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{dx(a)} + \frac{d\iota}{dx(a)} \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^2 - \dots + \frac{dv}{dx(a)} \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^{n-1} \\ &= \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^{n-1} \frac{dv}{dx(a)} - \frac{d\alpha(x)}{dy} \text{ et } \xi = \frac{d\zeta}{dx(a)} - \pi \frac{dy}{dx(a)} \\ &= \frac{d\zeta}{dx(a)} - \frac{d\eta}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{dx(a)} + \frac{d\theta}{dx(a)} \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^2 - \dots \\ &= \frac{dv}{dx(a)} \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^{n-1} + \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^n \frac{d\alpha(x)}{dy} \end{aligned}$$

Si, après avoir débarrassé l'équation donnée de fractions et de radicaux, on y substitue à la place des dérivées de  $z$  de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre même de cette équation, leurs valeurs tirées des formules précédentes, où  $\xi, \pi, \rho, \dots, \tau, \upsilon, \omega$ , représentent ces dérivées, et  $\zeta, \eta, \theta, \dots, \lambda, \mu, \nu$ , celles de l'ordre immédiatement inférieur, et qu'on ordonne l'équation résultante relativement

aux puissances ascendantes de  $\frac{dv}{d\alpha(x)}$ , on aura une transformée de

la forme

$$P + Q \frac{dv}{d\alpha(x)} + R \left( \frac{dv}{d\alpha(x)} \right)^2 + \&c. = 0,$$

que les valeurs des dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation donnée, tirées de l'intégrale, rendront nécessairement identique, comme elles rendent identique cette équation elle-même. Cette circonstance est indépendante de la valeur de la fonction de  $x$  et de  $y$ , désignée par  $\alpha$ ; mais lorsque  $\alpha$  est pris à volonté, les fonctions arbitraires se trouvant indifféremment dans toutes les quantités qui

entrent dans la transformée, on ne peut tirer aucune conséquence de cette considération : si, au contraire,  $a$  est une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive, alors il faudra distinguer deux cas, celui où l'intégrale primitive contient une fonction arbitraire composée de  $a$ , de manière que parmi les dérivées de  $z$  qui entrent dans l'équation donnée, il y en a d'hétérogènes à l'intégrale relativement à cette fonction, et celui où elles lui sont toutes homogènes relativement à la même fonction.

Dans le premier cas, les dérivées de l'ordre le plus élevé qui se trouvent dans l'équation donnée, contiendront exclusivement, d'après ce qui a été démontré précédemment, une fonction de  $a$  qui ne pourra se trouver dans aucune des dérivées de  $z$  des ordres précédens, ni dans les quantités

$$\frac{d\zeta}{dx(a)}, \frac{d\eta}{dx(a)}, \frac{d\theta}{dx(a)}, \dots, \frac{d\lambda}{dx(a)}, \frac{d\mu}{dx(a)}, \frac{d\nu}{dx(a)},$$

qui dérivent de celles de l'ordre immédiatement inférieur par une différenciation où  $a$  est considéré comme constant, et qui ne peut par conséquent introduire aucune nouvelle fonction de  $a$  dans ces quantités; mais puisqu'on suppose que les dérivées de  $z$  ne sont pas homogènes à l'intégrale relativement à cette fonction, celles de l'ordre le

plus élevé parmi lesquelles se trouve  $\omega = \frac{\frac{d\nu}{da(x)}}{\frac{d\nu}{dy}}$ , contiendront toutes

la nouvelle fonction produite par les différenciations relatives à  $a$ , et qui ne peut disparaître de cette valeur de  $\omega$  par la suppression d'un facteur commun à son numérateur et à son dénominateur, puisque nous considérons le cas où il y a dans l'équation donnée des dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale.

Il suit de la manière même dont nous avons obtenu la transformée,

$$P + Q \frac{\frac{dv}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}} + R \left( \frac{\frac{dv}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}} \right)^2 + \&c. = 0$$

que  $\frac{\frac{dv}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}$  contiendra nécessairement, dans ce cas, une fonction de  $\alpha$

qui ne pourra se trouver dans les valeurs d'aucune des quantités qui entrent dans  $P, Q, R, \&c.$ , et qu'ainsi les valeurs des dérivées de  $z$ , tirées de l'intégrale, ne pourront la rendre identique, la fonction de  $\alpha$  de l'intégrale primitive restant arbitraire, à moins qu'on n'ait séparément

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

Au contraire, dans le cas où toutes les dérivées de  $z$ , jusqu'à celles de l'ordre de la proposée inclusivement, sont homogènes à l'intégrale relativement à la fonction arbitraire de  $\alpha$ , toutes ces dérivées, et par

conséquent  $\omega = \frac{\frac{dv}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}$ , après la suppression du facteur commun à

$\frac{dv}{d\alpha(x)}$  et à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ , ne contiendront que les mêmes fonctions de  $\alpha$  qui se trouvent dans l'intégrale, et par conséquent dans  $P, Q, R, \&c.$ ; en sorte que les valeurs des dérivées de  $z$  pourront rendre la transformée identique, sans que  $P, Q, R, \&c.$  soient nuls séparément. On peut, d'après cette considération, déterminer en général, lorsqu'une équation donnée est susceptible d'une intégrale primitive de la première classe, combien cette intégrale doit renfermer de fonctions arbitraires de chacun des trois genres définis ci-dessus, savoir, les fonctions arbitraires qui ne dépendent que de  $x$  seul ou de  $y$  seul; celles qui sont composées de quantités qui varient à-la-fois avec  $x$  et avec  $y$ ; et par rapport auxquelles il y a dans l'équation donnée des dérivées hétérogènes à l'intégrale, et celles à l'égard desquelles il n'y en a dans cette équation que d'homogènes à l'intégrale.

Il suffira, en effet, pour savoir si l'intégrale supposée de la première classe d'une équation donnée aux différentielles partielles, peut, sans en restreindre la généralité, contenir des fonctions arbitraires relativement auxquelles les dérivées de  $z$  de l'ordre le plus élevé soient hétérogènes à cette intégrale, ou s'il faut nécessairement qu'elles lui soient toutes homogènes, de poser les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.,$$

et d'y remplacer les quantités

$$\frac{d\zeta}{dx(\alpha)}, \quad \frac{dn}{dx(\beta)}, \quad \dots \dots \dots \frac{d\lambda}{dx(\alpha)}, \quad \frac{d\mu}{dx(\alpha)}, \quad \frac{dv}{dx(\alpha)},$$

par leurs valeurs

$$\begin{aligned} \xi + \pi \frac{dy}{dx(\alpha)}, \quad \pi + \rho \frac{dy}{dx(\alpha)}, \quad \dots \dots \dots \sigma + \tau \frac{dy}{dx(\alpha)}, \\ \tau + \upsilon \frac{dy}{dx(\alpha)}, \quad \upsilon + \omega \frac{dy}{dx(\alpha)}; \end{aligned}$$

dès-lors ces équations, dont je représenterai le nombre par  $m$ , ne contiendront plus que  $x, y, z, p, q, r, \dots \xi, \pi, \rho, \dots \tau, \upsilon, \omega$ , et la quantité  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$ ; si l'on tire d'une de ces équations ou d'une combinaison quelconque des mêmes équations la valeur de cette dernière quantité, et qu'on la substitue dans toutes les autres, on aura  $m-1$  équations entre  $x, y, z$  et les dérivées de  $z$  jusqu'à celles de l'ordre de l'équation donnée inclusivement.

Lorsque les relations ainsi obtenues entre ces quantités sont toutes identiques entre elles et avec l'équation donnée, cette valeur de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$  détermine pour  $\alpha$  une valeur telle, qu'une fonction arbitraire de cette quantité peut entrer d'une manière quelconque dans une intégrale de la première classe de l'équation donnée, sans que cette intégrale cesse d'être générale; mais s'il résultait de cette substitution des relations entre  $x, y, z, p, q, r, \dots \xi, \pi, \rho, \dots \tau, \upsilon, \omega$ , étrangères à l'équation donnée, l'existence dans l'intégrale primitive d'une fonction de  $\alpha$ , par

rapport à laquelle des dérivées contenues dans l'équation donnée seraient hétérogènes à cette intégrale, entraînerait nécessairement l'existence de ces relations, ce qui est contraire à l'idée que nous nous sommes faite d'une intégrale générale. Un système d'équation contenant cette fonction arbitraire et un nombre fini de ses dérivées, ne pourrait donc être alors qu'une solution ou intégrale particulière de l'équation donnée; c'est ce qui arrive quand on peut satisfaire aux équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.,$$

au moyen d'une seule relation entre  $x, y, z$ . Il est évident d'ailleurs que si l'on ne pouvait y satisfaire que par plusieurs relations entre  $x, y, z$ ;  $x$  et  $y$  ne seraient plus indépendantes; et qu'il n'y aurait plus lieu à l'existence des différentielles partielles dont se compose l'équation donnée. Après qu'on aura tiré d'une des équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

toutes les valeurs de  $\frac{dy}{dx(a)}$  qui en rendent le premier membre nul, et qu'on aura vu s'il y en a, et quelles sont celles qui satisfont aux autres équations, sans supposer entre  $x, y, z$  et les dérivées de  $z$ , d'autres relations que l'équation donnée et ses dérivées, on saura s'il peut y avoir et combien il peut y avoir dans son intégrale, si elle est susceptible d'en avoir une de la première classe, de fonctions arbitraires qui donnent pour les dérivées des valeurs hétérogènes à cette intégrale; en sorte qu'on sera certain, s'il y a une intégrale de cette sorte qui contiennent d'autres fonctions arbitraires, que, par rapport à ces dernières, toutes les dérivées de  $z$  sont homogènes à l'intégrale.

On voit par-là que, par de simples calculs d'élimination exécutés sur l'équation donnée, on peut non-seulement savoir combien son intégrale, supposée de la première classe, peut contenir de fonctions arbitraires par rapport auxquelles il y ait dans l'équation donnée des dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale, mais encore déterminer en fonctions de  $x, y, z$  et des dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre  $n$ , les valeurs que prend

$\frac{dy}{dx(a)}$ , quand on représente successivement par  $a$  les quantités dont se composent ces fonctions arbitraires. Nous allons montrer que l'on peut également déterminer de la même manière et en fonctions des mêmes quantités les valeurs que prend nécessairement  $\frac{dy}{dx(a)}$ , lorsque l'intégrale est générale et de la première classe, et que  $a$  représente une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires relativement auxquelles toutes les dérivées de  $z$  qui entrent dans l'équation donnée, sont homogènes à l'intégrale; mais nous remarquons auparavant,

I.° Que dès que le rapport  $\frac{dy}{dx(a)}$  est déterminé en  $x, y, z, p, q, r, \dots, \xi, \pi, \rho, \dots, \tau, \upsilon, \omega$ , et par conséquent en fonction implicite de  $x$  et de  $y$ ;  $a$  l'est aussi de la même manière, au moyen d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre à laquelle satisfont également et exclusivement  $a$  et toutes les fonctions de  $a$ ; ce qu'il était facile de prévoir, puisque  $a$  entrant dans l'intégrale sous une fonction arbitraire, peut être remplacé par l'une quelconque de ses fonctions; et ne peut par conséquent être déterminé que par une équation à laquelle ces fonctions satisfassent également.

On a, en effet, en considérant  $a$  comme une fonction de  $x$  et de  $y$ ,

$$\frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}} = \frac{dy}{dx(a)}$$

d'où il suit que quand on a la valeur de  $\frac{dy}{dx(a)}$ , on a aussi, en en

changeant les signes, celle du rapport  $\frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}}$  des dérivées de  $a$  par rapport à  $x$  et à  $y$ , ce qui donne pour la détermination de  $a$  une équation aux différentielles partielles du premier ordre, à laquelle satisfont toutes les fonctions de  $a$ , parce que

$$\frac{\frac{df(a)}{dx(y)}}{\frac{df(a)}{dy(x)}} = \frac{\frac{da}{dx(y)} f'(a)}{\frac{da}{dy(x)} f'(a)} = \frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}}$$

et qui ne peut être satisfaite que par des fonctions de  $a$ , parce que si

$$\frac{\frac{d\beta}{dx(y)}}{\frac{d\beta}{dy(x)}} = \frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}} = \frac{dy}{dx(a)}$$

on a, en faisant évanouir la fraction,

$$\frac{d\beta}{dx(y)} + \frac{d\beta}{dy(x)} \cdot \frac{dy}{dx(a)} = 0,$$

équation dont le premier membre est précisément la valeur de  $\frac{d\beta}{dx(a)}$ , comme on le voit en faisant  $u = \beta$ , dans une formule trouvée précédemment : ainsi  $\frac{d\beta}{dx(a)} = 0$  et  $\beta = \Phi a$ .

2.<sup>o</sup> Que quand les dérivées de l'ordre le plus élevé de la proposée n'y sont multipliées ni par elles-mêmes ni entre elles, les valeurs de

$\frac{dy}{dx(a)}$ , et par conséquent celles de  $\frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}}$ , ne contiennent que  $x, y, z$

et les dérivées de  $z$ , jusqu'à l'ordre inférieur d'une unité à celui de la proposée, parce qu'alors la transformée, comme on le voit à l'inspection des valeurs que nous avons trouvées pour  $\xi, \pi, \dots, \tau, \upsilon, \omega$ , est nécessairement de la forme

$$P + Q \frac{\frac{dy}{dx(a)}}{\frac{da}{dy(x)}} = 0,$$

dans laquelle  $Q$  renferme seulement les quantités qui multiplieraient  $\xi, \pi, \dots, \tau, \upsilon, \omega$  avec  $\frac{dy}{dx(a)}$ ; d'où il suit qu'en tirant  $\frac{dy}{dx(a)}$  de

l'équation  $Q = 0$ , on aura des valeurs qui ne pourront contenir que ces mêmes quantités.

3.° Que si ces mêmes dérivées de l'ordre le plus élevé ne sont multipliées que par des fonctions de  $x$  et de  $y$ , comme il arrive dans les équations linéaires et dans une infinité d'autres, les valeurs de  $\frac{dy}{dx(a)}$  tirées de l'équation  $Q = 0$ , ne contiendront que  $x$  et  $y$ ; en sorte que l'on aura pour déterminer  $a$  une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre  $x$ ,  $y$  et  $a$ , qui, lorsqu'on y considérera  $x$  et  $a$  comme variables indépendantes, ne contiendra que  $x$ ,  $y$  et la dérivée de  $y$  par rapport à  $x$ ; en sorte qu'on pourra l'intégrer comme une équation aux différentielles ordinaires entre elles deux variables  $x$  et  $y$ , pourvu qu'on remplace la constante arbitraire par une fonction de  $a$ , ou plutôt par  $a$  lui-même, ce qui reviendrait au même; on aurait donc ainsi toutes les valeurs de  $a$  en fonctions de  $x$  et de  $y$ .

Nous venons de voir que lorsque les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \&c.$$

sont telles qu'en se servant de l'une pour éliminer  $\frac{dy}{dx(a)}$  de toutes les autres, celles-ci ne deviennent pas identiques à la proposée; une intégrale générale ne peut contenir que des fonctions arbitraires relativement auxquelles toutes les dérivées de  $z$  qui entrent dans l'équation donnée soient homogènes à l'intégrale, et qui soient telles, par conséquent, que la nouvelle fonction produite par les différenciations rela-

tives à  $a$  disparaisse de la fraction  $\frac{\frac{dv}{da(x)}}{\frac{dy}{da(x)}}$ , lorsqu'on la réduit à sa plus

simple expression. Démontrons maintenant que dans ce cas, comme

dans le précédent, le rapport  $\frac{\frac{da}{dx(y)}}{\frac{da}{dy(x)}} = \frac{dy}{dx(a)}$ , est nécessairement

déterminé

déterminé en fonctions de  $x, y, z$ , et des dérivées de  $z$  qui ne passent pas l'ordre de la proposée.

Soit

$$V = F(x, y, z, p, q, \dots, \xi, \pi, \dots, \tau, v, \omega) = 0$$

l'équation proposée : l'intégrale, quelle qu'elle soit, doit satisfaire non-seulement à cette équation, mais encore à toutes ses dérivées prises, soit par rapport à  $x$ , soit par rapport à  $y$ . Prenons ces dérivées relativement à  $y$ , en marquant par des indices les dérivées de  $\xi, \pi, \dots, \tau, v, \omega$  par rapport à  $y$ , nous aurons successivement

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) \xi' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \pi' + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) \omega' +$$

$$f(x, y, z, p, q, \dots, \xi, \pi, \dots, \tau, v, \omega) = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) \xi'' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \pi'' + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) \omega'' +$$

$$f(x, y, z, p, q, \dots, \xi', \pi', \dots, \tau', v', \omega') = 0, \text{ \&c. \&c. ;}$$

en sorte que, dans chacune de ces équations, les dérivées de l'ordre le plus élevé ne seront multipliées que par les quantités

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right), \left(\frac{dV}{d\pi}\right), \dots, \left(\frac{dV}{d\omega}\right)$$

qui ne contiennent, comme  $V$ , que  $x, y, z, p, q, \dots, \xi, \pi, \dots, \omega$ ; et comme les équations qui nous ont donné les valeurs de  $\xi, \pi, \dots, \omega$ , en fonctions de

$$\frac{dy}{dx(a)}, \frac{d\xi}{dx(a)}, \frac{dv}{dx(a)}, \dots, \frac{d\tau}{dx(a)}$$

et de la fraction  $\frac{d\alpha(x)}{dy}$ , ont lieu également pour tous les ordres, et

donnent par conséquent les valeurs de  $\xi^{(r)}, \pi^{(r)}, \dots, \tau^{(r)}, v^{(r)}, \omega^{(r)}$ ,

en fonctions de  $\xi^{(r-1)}$ ,  $\pi^{(r-1)}$ , ...,  $\tau^{(r-1)}$ ,  $\nu^{(r-1)}$ ,  $\omega^{(r-1)}$ , en y écrivant seulement ces dernières quantités à la place de  $\zeta$ ,  $\pi$ , ...,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , il est évident, à la seule inspection de ces valeurs, que dans toutes les transformées déduites des dérivées de la proposée par rapport à  $y$ , où on les aura substituées, les fractions

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \&c.$$

seront toutes multipliées, chacune dans la transformée où elle se trouvera, par la même quantité

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) \left(\frac{dy}{d\alpha(x)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \left(\frac{dy}{d\alpha(x)}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right);$$

et pour que ces transformées aient lieu indépendamment des valeurs de

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \&c.,$$

il faudra, par conséquent, qu'on ait séparément

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) \left(\frac{dy}{d\alpha(x)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \left(\frac{dy}{d\alpha(x)}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) = 0. \quad (A)$$

Or, pour que ces transformées pussent avoir lieu sans cette condition, il faudrait qu'il ne parût aucune nouvelle dérivée dans les numérateurs des fractions

$$\frac{\frac{d\omega}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega'}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \frac{\frac{d\omega''}{d\alpha(x)}}{\frac{dy}{d\alpha(x)}}, \quad \&c.,$$

qui ne disparût en vertu d'un facteur commun à  $\frac{dy}{d\alpha(x)}$ ; et l'on voit d'ailleurs que cette dernière quantité ne change point en passant d'un ordre

de dérivation à un autre, tandis qu'à chaque différenciation il s'introduit une nouvelle fonction arbitraire dans les numérateurs correspondans. Il s'ensuit donc qu'on arrivera nécessairement à une transformée où une nouvelle fraction arbitraire entrera seulement dans la fonction,  $\frac{d\omega(\alpha)}{\frac{d\alpha(x)}{dy}}$ , et où l'équation (A) sera nécessairement satisfaite.

Cette équation donnera des valeurs déterminées de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$ , en fonctions de  $x, y, z, p, q, \dots, \xi, \pi, \dots, \omega$ , et dont il suffira de changer le signe pour avoir celles de  $\frac{d\alpha}{\frac{dx(y)}{dy(x)}}$ .

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) \xi' + \left(\frac{dV}{d\pi}\right) \pi' + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) \omega' +$$

$$f(x, y, z, p, q, \dots, \xi, \pi, \dots, \omega) = 0,$$

représentant toujours l'équation qui résulte de la différenciation de la proposée par rapport à  $y$ , si l'on y substitue à  $\xi', \pi', \dots, \omega'$ , les valeurs dont nous venons de parler, et qu'on égale séparément à zéro les

termes de l'équation ainsi obtenus, qui seront multipliés par  $\frac{d\omega}{\frac{d\alpha(x)}{dy}}$ ,

il est évident qu'il restera une équation de laquelle on pourra tirer

une autre valeur de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$  ou de  $\frac{d\alpha}{\frac{dx(y)}{dy(x)}}$ . Cette valeur sera nécessairement égale à la première en vertu de l'équation donnée; mais elle contiendra les dérivées de l'ordre immédiatement supérieur à celui de la proposée, ce qui n'empêchera pas que cette équation ne soit souvent d'un grand secours pour la détermination de son intégrale.

On voit donc que, de quelque manière qu'une fonction arbitraire entre dans une intégrale générale, où cette fonction n'est ni en série infinie, ni sous un signe d'intégration partielle, il faut nécessairement que la quantité dont elle est composée, loin de pouvoir être prise à volonté, soit telle que le rapport de ses dérivées relatives à  $x$  et à  $y$ , ait une valeur déterminée en fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et des dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre de l'équation donnée. On voit en même temps que cette condition détermine ces quantités, autant qu'elles sont susceptibles de l'être, puisqu'elle ne peut avoir lieu que relativement à ces quantités et à leurs fonctions qui peuvent toujours leur être substituées. L'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{dV}{d\omega}\right) = 0$$

est du degré  $n$ , et donne en général  $n$  valeurs de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$ ; ces valeurs, dont aucune ne peut être nulle ou infinie, quand l'équation donnée  $V=0$  contient les deux dérivées extrêmes,

$$\xi \equiv \frac{d^n z}{dx^n} \quad \text{et} \quad \omega \equiv \frac{d^n z}{dy^n},$$

sont celles de  $\frac{d\alpha}{dx(y)}$  pour les  $n$  quantités représentées par  $\alpha$ , dont les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive sont nécessairement composées, lorsque l'équation donnée peut en avoir une appartenant à la première classe.

Si parmi les  $n$  racines de l'équation dont nous venons de parler, il s'en trouve d'égales, l'équation donnée ne pourra avoir une intégrale de la première classe, qui contienne un nombre suffisant de fonctions arbitraires pour être générale, à moins qu'il n'y ait dans cette intégrale autant de fonctions arbitraires indépendantes entre elles, composées d'une même valeur de  $\alpha$ , correspondantes à ces racines égales.

Lorsque  $\omega$  manquera dans l'équation donnée, une des  $n$  valeurs de  $\frac{dy}{dx(a)}$  sera égale à zéro; ce qui donnera

$$y = fa \quad \text{et} \quad a = Fy,$$

ou simplement  $a = y$ , puisqu'une fonction de  $a$  peut toujours être substituée à  $a$ ; il ne pourra donc y avoir une intégrale primitive de la première classe avec  $n$  fonctions arbitraires, à moins qu'elle ne contienne une fonction arbitraire de  $y$ .

Par la même raison, si, outre  $\omega$ , l'équation donnée manque de quelques-unes des dérivées de  $z$  de l'ordre  $n$  qui précèdent immédiatement  $\omega$ , on aura autant de valeurs de  $\frac{dy}{dx(a)}$  égales à zéro, et l'intégrale primitive ne pourra par conséquent être générale qu'autant qu'elle renfermera un même nombre de fonctions arbitraires de  $y$ , indépendantes entre elles.

Il suit de ce qui a été dit au commencement de ce mémoire sur la manière dont s'introduisent dans le calcul les nouvelles fonctions dérivées des fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale primitive, que quand cette intégrale en contient qui soient composées de  $y$  seul,  $\omega$  en renferme une nouvelle qui ne peut se trouver dans aucune des autres dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre  $n$ . Cela suffit pour démontrer que  $\omega$  ne saurait entrer dans une équation aux différentielles partielles qui a une intégrale de la première classe où entre une fonction de  $y$  seul. Il suit encore des mêmes considérations, qu'il y a dans le même cas une autre arbitraire qui ne peut se trouver que dans  $v$ ,  $v$  et  $\omega$ ; en sorte que si  $v$  et  $\omega$  manquent dans l'équation donnée,  $v$  ne saurait y entrer, tant qu'il y a une intégrale primitive de la première classe. Une équation qui contiendrait  $v$  et où  $v$  et  $\omega$  n'entreraient pas, ne peut donc avoir une intégrale primitive de cette classe; mais cela n'empêcherait pas qu'elle ne pût avoir une intégrale intermédiaire de la même forme que les intégrales primitives dont nous avons formé la première classe: car, pour n'en citer que l'exemple le plus simple, il est évident qu'en

nommant  $\varepsilon$  la dérivée  $\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}$  de  $z$  de l'ordre  $n-2$  relative à  $y$  seul, l'équation  $\lambda = \varepsilon + \Phi x$  est l'intégrale première de l'équation  $\tau = v$ , où  $v$  et  $\omega$  manquent, quoiqu'elle contienne  $v$ .

Si, au lieu de  $\omega$  et des dérivées de  $z$  de l'ordre  $n$  qui précèdent immédiatement  $\omega$ , c'étaient  $\xi$  et les dérivées  $\pi, \rho, \&c.$  qui suivent immédiatement  $\xi$ , dont il manquât un certain nombre  $i$  dans l'équation donnée, l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

ne serait plus que du degré  $n-i$ , et ne donnerait que  $n-i$  déterminations pour  $\alpha$ ; mais en changeant alors  $x$  en  $y$  et  $y$  en  $x$ , on verrait, par ce que nous venons de dire, que l'équation donnée ne pourrait avoir une intégrale générale de la première classe qu'autant que cette intégrale renfermerait  $i$  fonctions arbitraires indépendantes entre elles, composées de  $x$  seul, et dans le cas où l'équation donnée ne contiendrait ni  $\xi$  ni  $\pi$  qu'autant que  $\zeta$  y manquerait aussi.

L'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

donnera donc toujours les valeurs de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$  ou de  $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y)}}{\frac{d\alpha}{dy(x)}}$  correspondantes à toutes les fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans une intégrale générale primitive de la première classe, si l'équation donnée peut en avoir une; elle fera connaître en même temps si, parmi ces fonctions arbitraires, il peut y en avoir et combien il peut y en avoir qui soient composées de  $x$  seul ou de  $y$  seul: c'est ce qu'on savait déjà, quoiqu'on ne l'eût peut-être pas démontré complètement, et qu'on eût négligé de faire voir d'où venaient les modifications qu'apporte, dans la généralité de cette proposition, la forme d'intégrales

partielles ou de séries infinies des intégrales dont se composent les autres classes. Mais les considérations précédentes, en complétant cette théorie, conduisent à un résultat nouveau, et dont je ferai dans la suite de ces recherches un usage fréquent; c'est le moyen de distinguer parmi les valeurs de  $\frac{dy}{dx(a)}$ , celles qui correspondent à des fonctions arbitraires relativement auxquelles il peut y avoir dans l'équation donnée des dérivées de  $z$  hétérogènes à l'intégrale, et celles qui correspondent aux fonctions arbitraires pour lesquelles toutes les dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre de l'équation donnée sont nécessairement homogènes à l'intégrale.

Nous avons vu comment on pouvait trouver les premières par un simple calcul d'élimination exécuté sur l'équation donnée, et nous venons de voir que l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(a)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(a)}\right)^{n-1} + \&c. = 0$$

donne à-la-fois les unes et les autres. Après avoir déterminé les premières comme nous l'avons dit, il pourra arriver trois cas: ou elles seront en nombre  $n$ , et alors l'équation du degré  $n$  qui ne ferait que les donner de nouveau devient inutile; dans ce cas les dérivées de  $z$  contenues dans l'équation donnée peuvent être hétérogènes à l'intégrale relativement à toutes les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive: ou il n'y en aura aucune, et il faudra que les dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre  $n$  soient homogènes à l'intégrale relativement aux mêmes fonctions arbitraires, d'où il suit qu'on ne pourra tirer les valeurs correspondantes de  $\frac{dy}{dx(a)}$  que de l'équation

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{dx(a)}\right)^n + \left(\frac{dV}{d\pi}\right)\left(\frac{dy}{dx(a)}\right)^{n-1} + \&c. = 0;$$

ou enfin on en aura un nombre moindre que  $n$ , qui répondront aux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive pour lesquelles il peut y avoir dans l'équation donnée des dérivées de  $z$  hétérogènes à l'inté-

grale; et en divisant l'équation dont nous venons de parler par le produit de tous les facteurs correspondans à ces valeurs, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation qui donnera seulement les valeurs de  $\frac{dy}{dx(\alpha)}$  relatives aux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive pour lesquelles toutes les dérivées de  $z$  jusqu'à l'ordre  $n$  sont nécessairement homogènes à cette intégrale.

Soit, par exemple,

$$st + x(rt - s^2)^2 = 0.$$

Si l'on y substitue  $\frac{dq}{dx(\alpha)} - t \frac{dy}{dx(\alpha)}$  au lieu de  $s$ ; et

$$\frac{dp}{dx(\alpha)} - \frac{dq}{dx(\alpha)} \frac{dy}{dx(\alpha)} + t \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2$$
 au lieu de  $r$ ;

$t$  étant égal à  $\frac{\frac{dq}{dx(\alpha)}}{\frac{dy}{dx(\alpha)}}$ ; elle deviendra

$$x \left( \frac{dq}{dx(\alpha)} \right)^4 + t \left[ \frac{dq}{dx(\alpha)} - 2x \left( \frac{dq}{dx(\alpha)} \right)^2 \left( \frac{dp}{dx(\alpha)} + \frac{dq}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \right) \right] \\ + t^2 \left[ x \left( \frac{dp}{dx(\alpha)} + \frac{dq}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 - \frac{dy}{dx(\alpha)} \right] = 0;$$

en sorte que

$$P = x \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^4, \\ Q = \frac{dq}{dx(\alpha)} \left[ 1 - 2x \left( \frac{dq}{dx(\alpha)} \right) \left( \frac{dp}{dx(\alpha)} + \frac{dq}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \right) \right],$$

$$R = x \left( \frac{dp}{dx(\alpha)} + \frac{dq}{dx(\alpha)} \cdot \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 - \frac{dy}{dx(\alpha)}.$$

En égalant ces trois quantités à zéro, on a d'abord  $\frac{dq}{dx(\alpha)} = 0$ ; et les trois équations qui résultent de cette opération se réduisent, par conséquent, aux deux suivantes :

$$s + t$$

$$s + t \frac{dy}{dx(\alpha)} = 0,$$

$$x \left( r + s \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 - \frac{dy}{dx(\alpha)} = 0,$$

la valeur  $\frac{dy}{dx(\alpha)} = -\frac{s}{t}$ , tirée de la première, change la seconde en

$$x \left( r - \frac{s^2}{t} \right)^2 + \frac{s}{t} = 0,$$

ou

$$x (rt - s^2)^2 + st = 0,$$

qui est précisément l'équation donnée. La valeur  $\frac{dy}{dx(\alpha)} = -\frac{s}{t}$  répond donc à une fonction arbitraire de  $\alpha$ , relativement à laquelle il peut y avoir, dans l'équation donnée, des dérivées hétérogènes à l'intégrale. L'équation

$$\left( \frac{dV}{dr} \right) \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 - \left( \frac{dV}{ds} \right) \frac{dy}{dx(\alpha)} + \left( \frac{dV}{dt} \right) = 0$$

devient ici

$$2xt(rt - s^2) \left( \frac{dy}{dx(\alpha)} \right)^2 + [4xs(rt - s^2) - t] \frac{dy}{dx(\alpha)} + 2xr(rt - s^2) + s = 0;$$

en la divisant par  $\frac{dy}{dx(\alpha)} + \frac{s}{t}$ , on a pour reste

$$2x(rt - s^2) \left( r - \frac{s^2}{t} \right) + 2s$$

qui est nul en vertu de l'équation donnée, et pour quotient

$$2xt(rt - s^2) \frac{dy}{dx(\alpha)} + 2xs(rt - s^2) - t;$$

en égalant ce quotient à zéro, on trouve

$$\frac{dy}{dx(\alpha)} = \frac{t}{2x(rt - s^2)} - \frac{s}{t},$$

valeur de  $\frac{da}{dx(a)}$ , correspondante à une fonction arbitraire qui ne

peut entrer dans une intégrale de l'équation donnée qui appartiendrait à la première classe, que sous la condition d'y être contenue de manière que toutes les dérivées de  $z$  du premier et du second ordre soient, relativement à cette fonction, homogènes à l'intégrale.

Soit maintenant proposée l'équation

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0;$$

on aura, en y faisant les mêmes substitutions, et laissant toujours,

pour abrégér,  $t$  à la place de  $\frac{dq}{da(x)}$ ,

$$py - q \frac{dq}{dx(a)} + \left( \frac{dp}{dx(a)} \frac{dq}{dx(a)} \cdot \frac{dy}{dx(a)} + q \frac{dy}{dx(a)} \right) t + \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - b^2 x^2 \right] t^2 = 0.$$

Posant séparément les trois équations  $P=0$ ,  $Q=0$ ,  $R=0$ , et

remplaçant  $\frac{dp}{dx(a)}$  par  $r + s \frac{dy}{dx(a)}$  et  $\frac{dq}{dx(a)} = s + t \frac{dy}{dx(a)}$ ,

on a

$$py - qs - qt \frac{dy}{dx(a)} = 0,$$

$$r - t \left( \frac{dy}{dx(a)} \right)^2 + q \frac{dy}{dx(a)} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx(a)} = \pm t b x;$$

en éliminant  $\frac{dy}{da(x)}$ , il vient

$$py - qs \mp b x q t = 0,$$

$$r - b^2 x^2 t \pm b x q = 0,$$

d'où l'on tire à-la-fois

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0,$$

qui est l'équation donnée, et

$$(py - qs)^2 = b^2 x^2 q^2 t^2.$$

Ainsi une équation primitive, de quelque nature qu'elle soit, ne peut jamais être l'intégrale générale de la proposée, dès qu'elle contient une fonction arbitraire dégagée de tout signe d'intégration partielle, relativement à laquelle les valeurs des dérivées de  $z$  du premier et du second ordre ne sont pas homogènes à l'intégrale, puisque toute équation primitive qui tomberait dans ce cas, et satisferait à la proposée

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0,$$

donnerait en même temps

$$(py - qs)^2 = b^2 x^2 q^2 t^2,$$

et ne pourrait par conséquent représenter la proposée que dans le cas particulier où l'on aurait cette dernière équation en même temps que l'équation

$$rt - b^2 x^2 t^2 + py - qs = 0.$$

Le Mémoire d'où ces Considérations générales sont tirées, contenait deux autres paragraphes où elles étaient appliquées à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre. Ces deux paragraphes ne se trouvent point ici, parce qu'il a paru plus convenable de les réunir aux autres Mémoires sur le même sujet que l'auteur a présentés depuis à l'Institut.